第一部分：材料力学

第 1 章　材料力学基本概念

一、杆件变形的基本形式有哪几种？

答：轴向拉伸或压缩变形、剪切变形、扭转变形、弯曲变形。

二、材料力学要研究的主要是哪三大问题？

答：构件的强度、刚度和稳定性。

三、对变形固体提出哪些基本假设？

答：连续性假设、均匀性假设、各向同性假设。

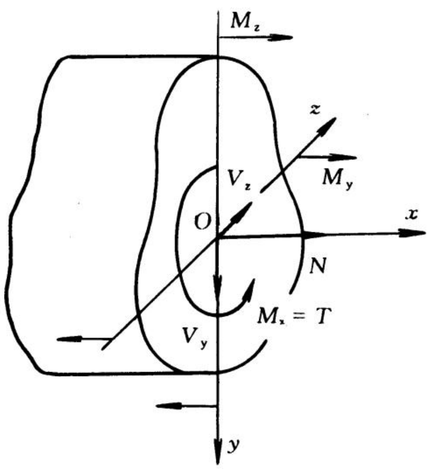
四、材料力学中有哪几种内力，分别如何表示，他们的方向怎么规定的？

答：(1)沿 x 轴的内力分量 N，垂直于横截面作用，称为轴力，对应拉伸或压缩变形。

(2)沿 y 轴与 z 轴的内力分别为 Vy 和 Vz，切于截面作用，称为剪力，对应剪切变形。

(3)绕 x 轴的内力分量为 M_X，其力偶作用面为 yoz 面，M_X 称为扭矩，用符号 T 表示，对应扭转变形。

(4)绕 y 轴与 z 轴的内力分量分别为力偶 M_y 和 M_z，其作用面分别为 xoz 面和 xoy 面，M_y 与 M_z 称为弯矩，对应弯曲变形。



五、材料力学中有哪几种应力？

答：正应力及剪应力。垂直于截面的应力分量称为正应力，用 σ 表示；与截面相切的应力分量称为剪应力，用 τ 表示。

第 2 章　轴向拉伸和压缩

一、一根直径为 $d=16\text{mm}$、长 $l=3\text{m}$ 的圆截面杆，承受轴向拉力 $F=30kN$，其伸长为 $\Delta l=2.2mm$。已知材料的许用应力为 $[\sigma]=170\text{MPa}$，试校核杆件的强度，求材料的弹性模量 E。

解：$\sigma=\dfrac{F_N}{A}=\dfrac{30\times10^3}{\dfrac{\pi}{4}\times16^2}=149MPa<[\sigma]$

满足强度要求

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$$

$$E=\frac{F_N\,l}{\Delta l\,A}=\frac{30\times10^3\times3}{2.2\times10^{-3}\times\dfrac{\pi}{4}\times0.016^2}=203\times10^9\,Pa=203GPa$$

二、直径 $d=25mm$ 的钢圆杆，受轴向拉 60kN 作用时，在标距为 200mm 的长度内伸长了 0.113mm。当其承受一对扭转外力偶矩 $M_e=0.2kN\cdot m$ 时，在标距为 200mm 的长度内相对扭转了 0.732^o 的角度。试求钢材的弹性常数 G、G 和 ν。

解：（1）求弹性模量 E

$$\Delta l=\frac{Nl}{EA}$$

$$E=\frac{Nl}{A\cdot\Delta l}=\frac{60000N\times200mm}{0.25\times3.14\times25^2mm^2\times0.113mm}=216447.8MPa=216.448GPa$$

（2）求剪切弹性模量 G

$$I_p=\frac{1}{32}\pi d^4=\frac{1}{32}\times3.14159\times25^4=38349(mm^4)$$

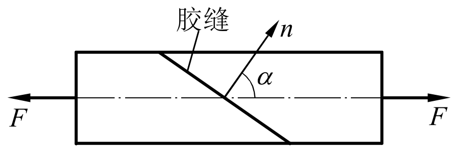
由 $\varphi=\dfrac{T\cdot l}{GI_P}$ 得：

$$G=\frac{T\cdot l}{\varphi\cdot I_p}=\frac{0.2\times10^6\,N\cdot mm\times200mm}{(0.732\times3.14/180)\times38349mm^4}=81684.136MPa=81.7GPa$$

（3）泊松比 ν

由 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 得：$\nu=\dfrac{E}{2G}-1=\dfrac{216.448}{2\times81.684}-1=0.325$

三、图示为胶合而成的等截面轴向拉杆，杆的强度由胶缝控制，已知胶的许用切应力$[\tau]$为许用正力$[\sigma]$的$1/2$。问α为何值时，胶缝处的切应力和正应力同时达到各自的许用应力。



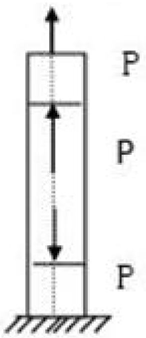
解：

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha \leqslant [\sigma]$$

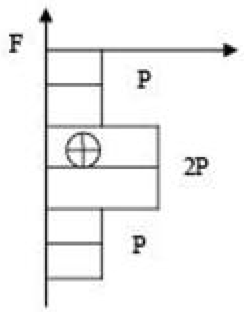
$$\tau_\alpha = \sigma\sin\alpha\cos\alpha \leqslant [\tau]$$

$$\tan\alpha = \frac{[\tau]}{[\sigma]} = \frac{1}{2}$$ 胶缝截面与横截面的夹角$\alpha = 26.57^\circ$

四、实心圆截面杆等截面杆件的直径 d=40mm；杆件的受力如图所示，P=20KN。要求：（1）作杆件的轴力图；（2）求杆件内最大正应力。



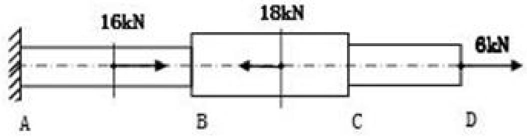
解：



$$\sigma_{max} = \frac{2P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{2P}{\frac{1}{4}\pi\times 0.04^2} = 31.85\times10^6\,(Pa)$$

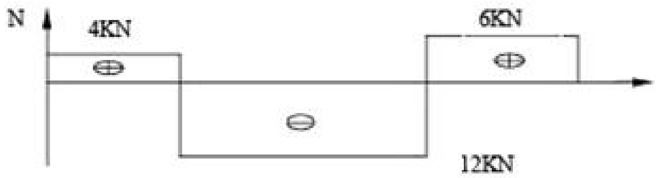
五、变截面杆件的各段均采用实心圆截面杆，AB 段与 CD 段的直径相同，d=40mm，BC 段的直径是 AB 段直径的 2 倍，杆件的受力如图所示。要求：

（1）作杆件的轴力图；（2）求杆件内最大正应力。



解：

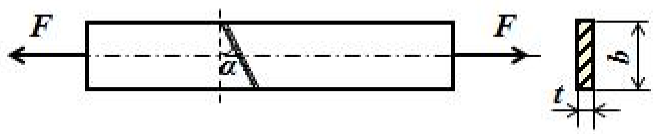
1.



2.

$$\sigma_{\max}=\frac{N}{A}=-\frac{12\times10^{3}}{\frac{\pi}{4}\times40^{2}\times10^{-6}}=-9.543\text{MPa}$$

六、图示由斜焊缝焊接而成的钢板受拉力 F 作用。已知：F=20kN，b=200mm，t=10mm，α =30o。试求焊缝内的应力。



解：本问题实际上是要求轴载直杆斜截面上的应力

先计算横截面上的应力

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{F}{bt}=\frac{20\times10^{3}}{0.2\times0.01}=10MPa$$

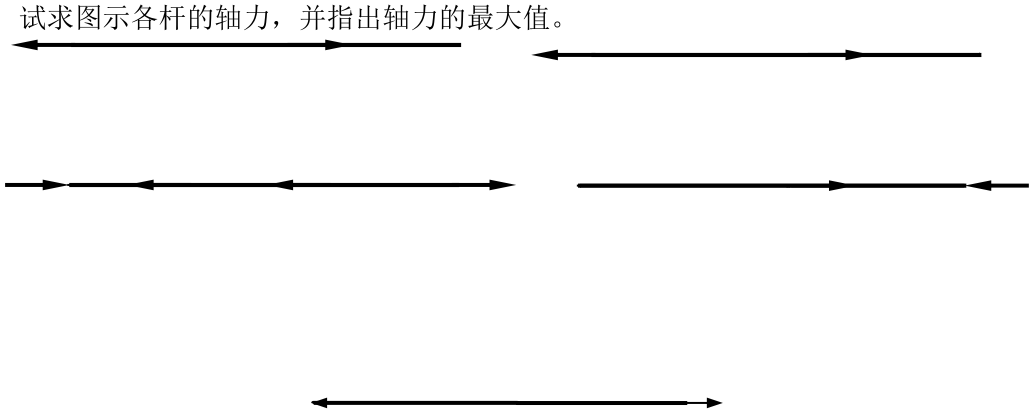
再用斜截面应力公式计算要求的应力

$$\sigma_{30^{\circ}}=\sigma\cos^{2}\alpha=10\times\cos^{2}30^{\circ}=7.5MPa$$

$$\tau_{30^{\circ}}=\frac{1}{2}\sigma\sin2\alpha=\frac{1}{2}\times10\times\sin(2\times30^{\circ})=4.33MPa$$

即焊缝处的正应力为 7.5MPa，切应力为 4.33MPa。

七、 试求图示各杆的轴力，并指出轴力的最大值。



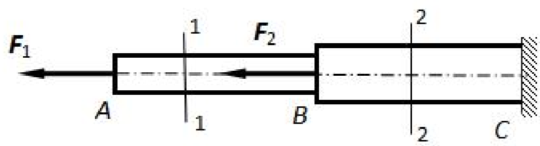
解：(a)

(b)

(c)

(d)

八、图示阶梯形圆截面杆，承受轴向载荷 F_1=50 kN 与 F_2作用，AB 与 BC 段的直径分别为 d_1=20 mm 和 d_2=30 mm ，如欲使 AB 与 BC 段横截面上的正应力相同，试求载荷 F_2之值。



解：(1) 用截面法求出 1-1、2-2 截面的轴力；

$$F_{N1} = F_1 \qquad F_{N2} = F_1 + F_2$$

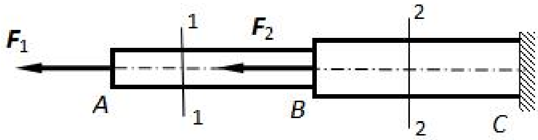
(2) 求 1-1、2-2 截面的正应力，利用正应力相同；

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{50\times10^3}{\frac{1}{4}\times\pi\times0.02^2} = 159.2MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{50\times10^3 + F_2}{\frac{1}{4}\times\pi\times0.03^2} = \sigma_1 = 159.2MPa$$

$$\therefore F_2 = 62.5kN$$

九、所示圆截面杆，已知载荷 F_1=200 kN，F_2=100 kN，*AB* 段的直径 d_1=40 mm，如欲使 *AB* 与 *BC* 段横截面上的正应力相同，试求 *BC* 段的直径。



解：(1) 用截面法求出 1-1、2-2 截面的轴力；

$$F_{N1} = F_1 \qquad F_{N2} = F_1 + F_2$$

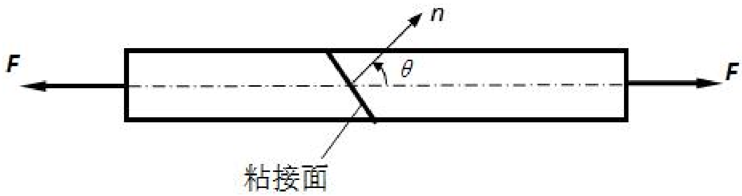
(2) 求 1-1、2-2 截面的正应力，利用正应力相同；

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{200 \times 10^3}{\frac{1}{4} \times \pi \times 0.04^2} = 159.2 MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{(200+100) \times 10^3}{\frac{1}{4} \times \pi \times d_2^2} = \sigma_1 = 159.2 MPa$$

$$\therefore d_2 = 49.0\ mm$$

十、 图示木杆，承受轴向载荷 *F*=10 kN 作用，杆的横截面面积 *A*=1000 mm^2，粘接面的方位角ϑ= 45^0，试计算该截面上的正应力与切应力，并画出应力的方向。



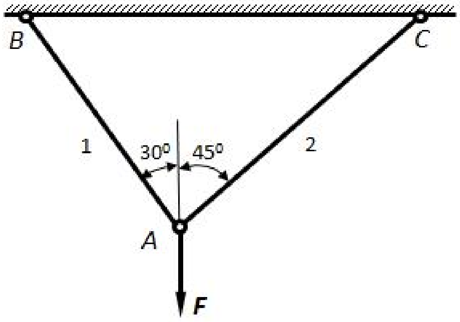
解：(1) 斜截面的应力：

$$\sigma_\theta = \sigma \cos^2\theta = \frac{F}{A}\cos^2\theta = 5\ MPa$$

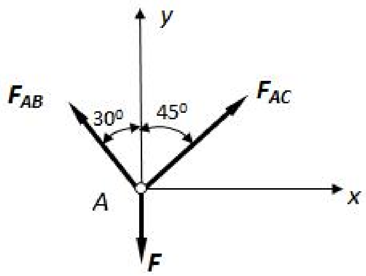
$$\tau_\theta = \sigma \sin\theta\cos\theta = \frac{F}{2A}\sin 2\theta = 5\ MPa$$

(2) 画出斜截面上的应力

十一、图示桁架，杆 1 与杆 2 的横截面均为圆形，直径分别为 d_1=30 mm 与 d_2=20 mm，两杆材料相同，许用应力[σ]=160 MPa。该桁架在节点 *A* 处承受铅直方向的载荷 *F*=80 kN 作用，试校核桁架的强度。



解：(1) 对节点 A 受力分析，求出 AB 和 AC 两杆所受的力；



(2) 列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad -F_{AB}\sin 30^0 + F_{AC}\sin 45^0 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{AB}\cos 30^0 + F_{AC}\cos 45^0 - F = 0$$

解得：

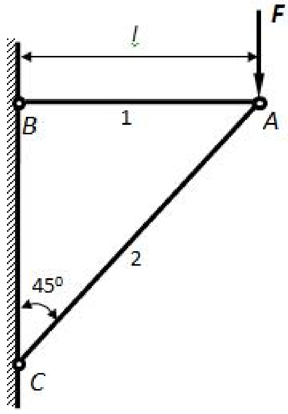
$$F_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}F = 41.4kN \qquad F_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}F = 58.6kN$$

(2) 分别对两杆进行强度计算；

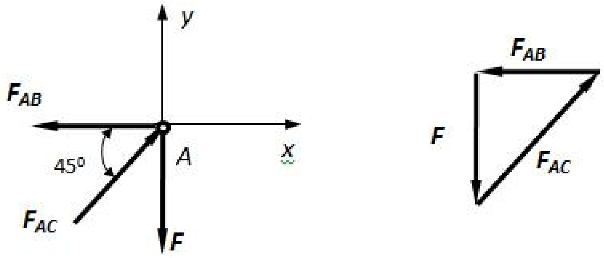
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_1} = 82.9MPa \prec [\sigma]$$
$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_2} = 131.8MPa \prec [\sigma]$$

所以桁架的强度足够。

十二、 图示桁架，杆 1 为圆截面钢杆，杆 2 为方截面木杆，在节点 A 处承受铅直方向的载荷 F 作用，试确定钢杆的直径 d 与木杆截面的边宽 b。已知载荷 F=50 kN，钢的许用应力$[\sigma_S]$ =160 MPa，木的许用应力$[\sigma_W]$ =10 MPa。



解：(1) 对节点 *A* 受力分析，求出 *AB* 和 *AC* 两杆所受的力；



$$F_{AC}=\sqrt{2}F=70.7kN \qquad F_{AB}=F=50kN$$

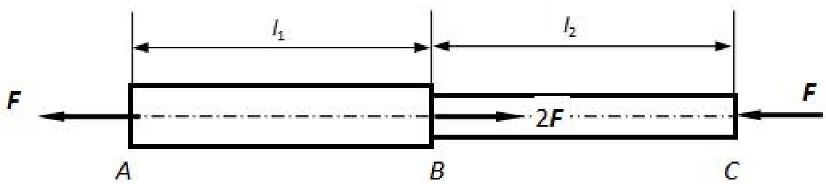
(2) 运用强度条件，分别对两杆进行强度计算；

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{AB}}{A_1}=\frac{50\times10^3}{\frac{1}{4}\pi d^2}\le[\sigma_S]=160MPa \qquad d\ge20.0mm$$

$$\sigma_{AC}=\frac{F_{AC}}{A_2}=\frac{70.7\times10^3}{b^2}\le[\sigma_W]=10MPa \qquad b\ge84.1mm$$

所以可以确定钢杆的直径为 20 mm，木杆的边宽为 84 mm。

十三、图示阶梯形杆 *AC*，*F*=10 kN，$l_1=l_2$=400 mm，$A_1=2A_2$=100 mm²，*E*=200GPa，试计算杆 *AC* 的轴向变形 Δl。



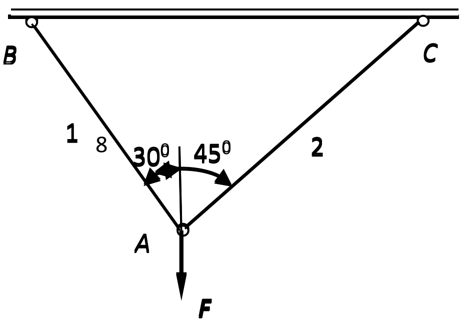
解：(1) 用截面法求 AB、BC 段的轴力；

$$F_{N1}=F \qquad F_{N2}=-F$$

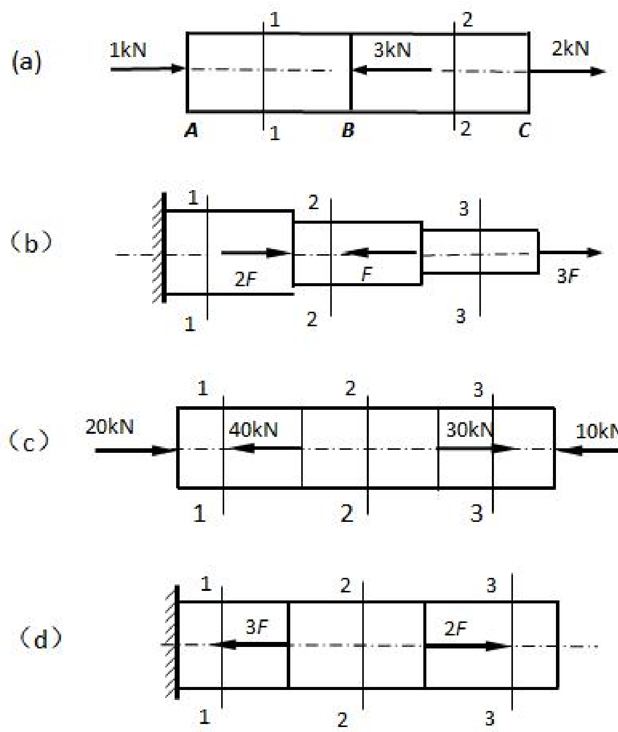
(2) 分段计算个杆的轴向变形；

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}+\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\frac{10\times10^3\times400}{200\times10^3\times100}-\frac{10\times10^3\times400}{200\times10^3\times50}$$

$$=-0.2\ mm$$



十四、求图示各杆 1－1、 2－2 和 3－3 截面上的轴力。



解：

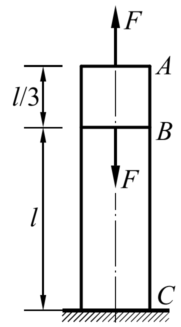
（a）F_{N1}= －1kN, F_{N2}= 2kN 。

（b）F_{N1}= 4F, F_{N2}=2F , F_{N3}= 3F。

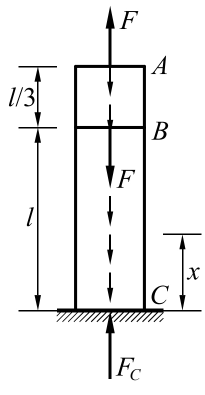
（c）F_{N1}= －20kN, F_{N2}= 20kN, F_{N3}= －10kN 。

（d）F_{N1}= －F , F_{N2}=2F, F_{N3}= 0。

十五、图示等直杆，已知载荷 F，BC 段长 l，横截面面积 A，弹性模量 E，质量密度ρ，考虑自重影响。试求截面 B 的位移。



解：由整体平衡得 $F_C = \dfrac{4}{3}\rho g A l$



BC 段轴力 $F_N(x) = \rho g A\left(x - \dfrac{4}{3}l\right)$

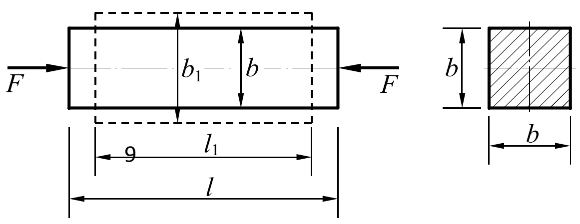
截面 B 的位移

$$\varDelta_B = \Delta l_{BC} = \int_0^l \frac{F_N(x)\,\mathrm{d}x}{EA}$$

$$= \int_0^l \frac{\rho g A\left(x - \frac{4}{3}l\right)}{EA}\mathrm{d}x = -\frac{5\rho g l^2}{6E} \quad (\downarrow)$$

十六、使图示正方形截面受压杆件变形后的体积不发生变化，试求该材料的泊松比值。

解： $V = b^2 l = b_1^2 l_1 = (b+\Delta b)^2 (l - \Delta l)$



$$=b^2\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)^2 l\left(1-\frac{\Delta l}{l}\right)$$

$$=b^2(1+\varepsilon')^2 l(1-\varepsilon)$$

得 $(1+\varepsilon')^2(1-\varepsilon)=1$

上式左端展开后略去二阶以上微量得 $2\varepsilon'=\varepsilon$

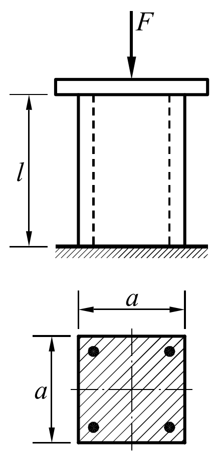
则 $\nu=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=0.5$

十七. 图示钢筋混凝土短柱，其顶端受轴向力 F 作用。已知： $F=1\ 200\ \text{kN}$，钢筋与混凝土的弹性模量之比 $E_g/E_h=15$ ，横截面面积之比 $A_g/A_h=1/60$ 。试求钢筋与混凝土的内力 F_{Ng} 与 F_{Nh} 。

解：平衡方程 $F_{Ng}+F_{Nh}=F$ **(1)**

变形协调方程 $\frac{F_{Ng}l}{E_g A_g}=\frac{F_{Nh}l}{E_h A_h}$，**即** $\frac{F_{Ng}}{F_{Nh}}=\frac{1}{4}$ **(2)**

解方程（1），（2）得 $F_{Ng}=\frac{F}{5}=240\ \text{kN}$，$F_{Nh}=\frac{4F}{5}=960\ \text{kN}$



十八、如图所示立柱材料为脆性材料，其许用压应力 $[\sigma^-]=160\ \text{MPa}$ ，许用拉应力 $[\sigma^+]=60\ \text{MPa}$ ，立柱直径 $d=60\ \text{mm}$ 。载荷 F 竖直作用在立柱顶部截面的边缘，则立柱能承受的最大载荷 F_{max} 是多大？

解：立柱处于压弯组合变形。

立柱中的最大拉应力为：$\sigma^{+}_{\max} = \dfrac{Fd}{2W_z} - \dfrac{F}{A} = \dfrac{16F}{\pi d^2} - \dfrac{4F}{\pi d^2} = \dfrac{12F}{\pi d^2}$

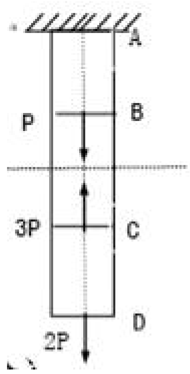
立柱中的最大压应力为（绝对值）：$\sigma^{-}_{\max} = \dfrac{Fd}{2W_z} + \dfrac{F}{A} = \dfrac{20F}{\pi d^2}$

由拉应力强度条件有：$\sigma^{+}_{\max} = \dfrac{12F}{\pi d^2} \le [\sigma^{+}]$ 得： $F \le \dfrac{\pi d^2[\sigma^{+}]}{12} = \dfrac{60\pi d^2}{12} = 5\pi d^2$

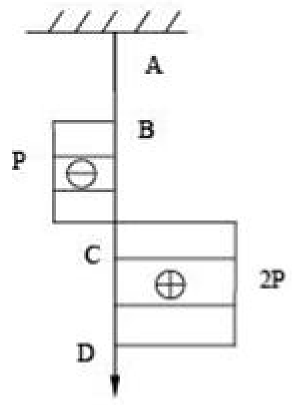
由压应力强度条件有：$\sigma^{-}_{\max} = \dfrac{20F}{\pi d^2} \le [\sigma^{-}]$ 得： $F \le \dfrac{\pi d^2[\sigma^{-}]}{20} = \dfrac{160\pi d^2}{20} = 8\pi d^2$

故立柱的许可载荷为：$[F] = 5\pi d^2 = 5 \times 3.14 \times 60^2 = 56.52 \times 10^3\ \mathrm{N} = 56.52\ \mathrm{kN}$

十九、等截面实心圆截面杆件的直径 d=40mm,材料的弹性模量 E=200GPa,AB=BC=CD=1m,在 B、C、D 截面分别作用有 P、2P、3P 大小的力，方向和作用线如图所示，P=10KN。（1）做此杆件的轴力图 （2）求此杆件内的最大正应力 （3）求杆件 C 截面的铅锤位移。



解：

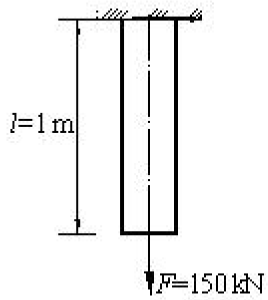


$$\sigma_{\max}=\frac{2P}{A}=\frac{2\times10\times10^{3}}{\frac{1}{4}\pi d^{2}}=15.9(MPa)$$

$$\Delta C=\Delta l_{BC}=\frac{F_{N}l}{EA}$$

$$=\frac{1\times10^{3}\times1}{200\times10^{9}\times\frac{1}{4}\pi d^{2}}=3.98\times10^{-6}(m)$$

二十、计算题 （共 30 分）图示直杆材料为低碳钢，弹性模量 $E=200\ \text{GPa}$，杆的横截面面积为 $A=5\ \text{cm}^{2}$，杆长 $l=1\ \text{m}$，加轴向拉力 $F=150\ \text{kN}$，测得伸长 $\Delta l=4\ \text{mm}$。试求卸载后杆的残余变形。

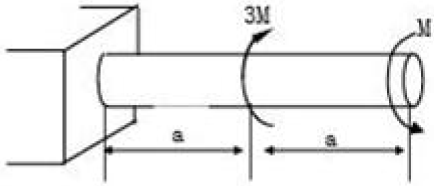


解：卸载后随之消失的弹性变形 $\Delta l_{\text{e}}=\dfrac{Fl}{EA}=1.5\ \text{mm}$

残余变形为 $\Delta l_{\text{p}}=\Delta l-\Delta l_{\text{e}}=2.5\ \text{mm}$

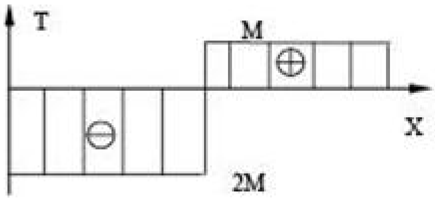
第 3 章　剪切和扭转

一、等截面实心圆轴的直径 **D=40mm**，受力外力偶矩 **M**、**3M** 的作用，转向如图所示。已知轴材料的许用剪应力 $[\tau]=60MPa$。要求：（**1**）作轴的扭矩图；（**2**）计算轴能够承担的外力偶矩 **M** 的大小。



解：

（一）



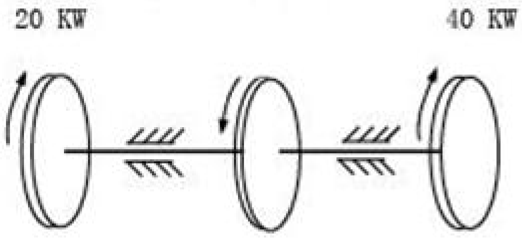
（二）

$$\tau_{max}=\frac{|T|_{max}}{w_t}\le 60\times10^6$$

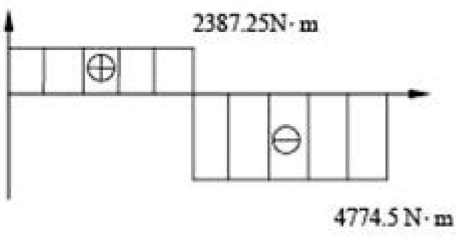
$$w_t=\frac{\pi d^3}{16} \qquad \frac{2M}{\frac{\pi D^3}{16}}\le 60\times10^6$$

$$M\le\frac{\pi\times60\times10^6\times0.04^3}{32}=376.99N\cdot m$$

二、等截面实心圆轴的转速为 **n=80r/min**，轴材料的许用切应力 $[\tau]=60MPa$，要求：（**1**）作轴的扭矩图；（**2**）设计实心轴的直径。



解：

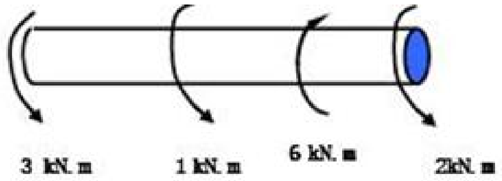


（二）

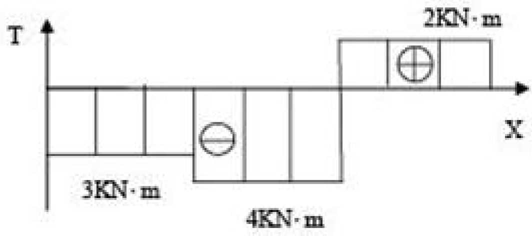
$$\tau_{\max}=\frac{|T|_{\max}}{w_t}\le 60\times10^6$$

$$w_t=\frac{\pi d^3}{16} \qquad d\ge\sqrt[3]{\frac{16\times4774.5}{\pi\times60\times10^6}}=74mm$$

三、等截面实心圆轴的直径 D=100mm，受力如图所示。已知轴材料的许用剪应力$\left[\tau\right]=60MPa$ 。要求：（1）作轴的扭矩图；（2）校核轴的强度。



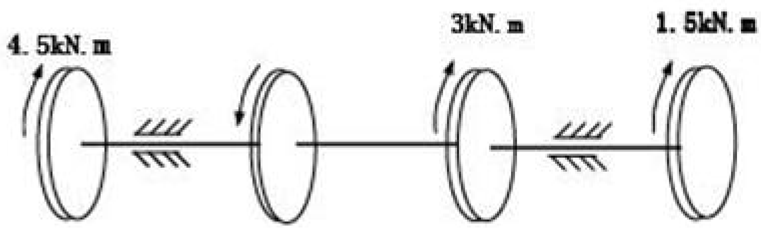
解：



$$|T|_{\max}=4\times10^3$$

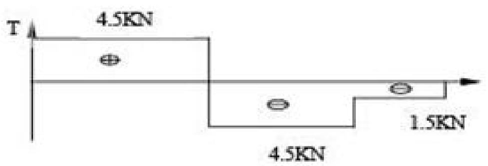
$$\tau_{\max}=\frac{4\times10^3}{\frac{1}{16}\pi\times0.13}=20.38MPa$$

四、等截面实心圆轴的直径 D=100mm,受力如图所示。已知轴材料的许用剪应力$\left[\tau\right]=60MPa$。要求：（1）作轴的扭矩图 （2）校核轴的强度。



解：

1.



2.

$$\tau_{\max}=\left|\frac{T}{W_t}\right|_{\max}=\frac{4.5\times10^3}{\frac{\pi}{16}a^3}=22.9\text{MPa}$$

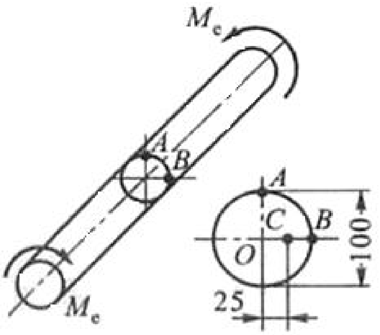
五、实心圆轴的直径$d=100mm$，长$l=1m$，其两端所受外力偶矩$M_e=14kN\cdot m$，材料的切变模量

$G = 80GPa$。试求：12-1

（1）最大切应力及两端面间的相对转角；

（2）图示截面上 A、B、C 三点处切应力的数值及方向；

（3）C 点处的切应变。



解：（1）计算最大切应力及两端面间的相对转角

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{M_e}{W_p}。$$

式中，$W_p = \frac{1}{16}\pi d^3 = \frac{1}{16} \times 3.14159 \times 100^3 = 196349(mm^3)$。故：

$$\tau_{\max} = \frac{M_e}{W_p} = \frac{14 \times 10^6 N \cdot mm}{196349 mm^3} = 71.302MPa$$

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_p}$$

式中，$I_p = \frac{1}{32}\pi d^4 = \frac{1}{32} \times 3.14159 \times 100^4 = 9817469(mm^4)$。故：

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_p} = \frac{14000 N \cdot m \times 1m}{80 \times 10^9 N/m^2 \times 9817469 \times 10^{-12} m^4} = 0.0178254(rad) = 1.02^o$$

（2）求图示截面上 A、B、C 三点处切应力的数值及方向

$$\tau_A = \tau_B = \tau_{\max} = 71.302MPa$$

由横截面上切应力分布规律可知：

$$\tau_C = \frac{1}{2}\tau_B = 0.5 \times 71.302 = 35.66MPa$$

A、B、C 三点的切应力方向如图所示。

（3）计算 C 点处的切应变

$$\gamma_C=\frac{\tau_C}{G}=\frac{35.66MPa}{80\times10^3MPa}=4.4575\times10^{-4}\approx0.446\times10^{-3}$$

六、空心钢轴的外径 $D=100mm$，内径 $d=50mm$。已知间距为 $l=2.7m$ 的两横截面的相对扭转角 $\varphi=1.8^o$，材料的切变模量 $G=80GPa$。试求：

（1）轴内的最大切应力；

（2）当轴以 $n=80r/\min$ 的速度旋转时，轴所传递的功率。

解：（1）计算轴内的最大切应力

$$I_p=\frac{1}{32}\pi D^4(1-\alpha^4)=\frac{1}{32}\times3.14159\times100^4\times(1-0.5^4)=9203877(mm^4)$$。

$$W_p=\frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)=\frac{1}{16}\times3.14159\times100^3\times(1-0.5^4)=184078(mm^3)$$

式中，$\alpha=d/D$。

$$\varphi=\frac{T\cdot l}{GI_p},$$

$$T=\frac{\varphi GI_p}{l}=\frac{1.8\times3.14159/180\times80000N/mm^2\times9203877mm^4}{2700mm}=8563014.45N\cdot mm$$

$$=8.563(kN\cdot m)$$

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=\frac{8563014.45N\cdot mm}{184078mm^3}=46.518MPa$$

（2）当轴以 $n=80r/\min$ 的速度旋转时，轴所传递的功率

$$T=M_e=9.549\frac{N_k}{n}=9.549\times\frac{N_k}{80}=8.563(kN\cdot m)$$

$$N_k=8.563\times80/9.549=71.74(kW)$$

七、圆轴的直径 $d=50mm$，转速为 120r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60 MPa，试问所传递的功率为多大？

解：（1）计算圆形截面的抗扭截面模量：

$$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3=\frac{1}{16}\times3.14159\times50^3=24544(mm^3)$$

（2）计算扭矩

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=60N/mm^2$$

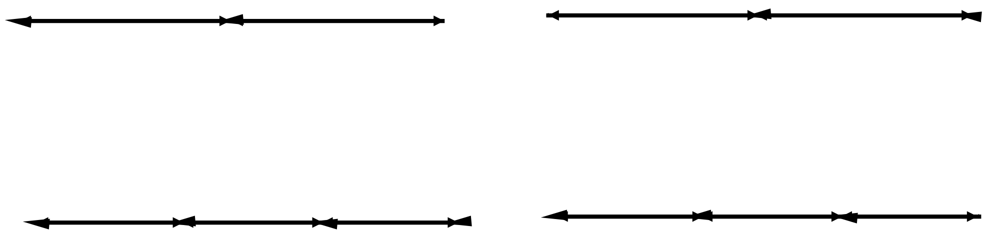
$$T = 60N/mm^2 \times 24544mm^3 = 1472640N \cdot mm = 1.473(kN \cdot m)$$

（3）计算所传递的功率

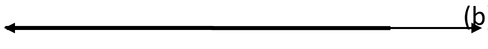
$$T = M_e = 9.549\frac{N_k}{n} = 1.473(kN \cdot m)$$

$$N_k = 1.473 \times 120 / 9.549 = 18.5(kW)$$

八、 试求图示各轴的扭矩，并画出扭矩图。



解：(a)



(b)

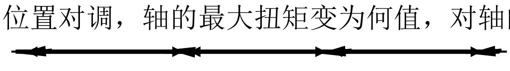
(c)

(d)

九、某传动轴，转速 n=300 r/min(转/分），轮 1 为主动轮，输入的功率 P_1=50 kW，轮 2、轮 3 与轮 4 为从动轮，输出功率分别为 P_2=10 kW，P_3=P_4=20 kW。

(1) 试画轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩。

(2) 若将轮 1 与论 3 的位置对调，轴的最大扭矩变为何值，对轴的受力是否有利。



解：(1) 计算各传动轮传递的外力偶矩；

$$M_1 = 9550\frac{P_1}{n} = 1591.7\,Nm \qquad M_2 = 318.3\,Nm \qquad M_3 = M_4 = 636.7\,Nm$$

(2) 画出轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩；

$$T_{\max} = 1273.4\ kNm$$

(3) 对调论 1 与轮 3，扭矩图为；

$$T_{\max} = 955\ kNm$$

所以对轴的受力有利。

十、图示空心圆截面轴，外径 *D*=40 mm，内径 *d*=20 mm，扭矩 *T*=1 kNm，试计算 *A* 点处(ρ_A=15 mm)的扭转切应力τ_A，以及横截面上的最大与最小扭转切应力。

解：(1) 计算横截面的极惯性矩；

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = 2.356\times10^5\ mm^4$$

(2) 计算扭转切应力；

$$\tau_A = \frac{T\rho_A}{I_\rho} = \frac{1\times10^6\times15}{2.356\times10^5} = 63.7\ MPa$$

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{I_\rho} = \frac{1\times10^6\times20}{2.356\times10^5} = 84.9\ MPa$$

$$\tau_{\min} = \frac{T\rho_{\min}}{I_\rho} = \frac{1\times10^6\times10}{2.356\times10^5} = 42.4\ MPa$$

十一、 图示圆截面轴，*AB* 与 *BC* 段的直径分别为 d_1 与 d_2，且 $d_1=4d_2/3$，试求轴内的最大切应力与截面 *C* 的转角，材料的切变模量为 *G*。

解：(1) 画轴的扭矩图；

(2) 求最大切应力；

$$\tau_{AB\max} = \frac{T_{AB}}{W_{pAB}} = \frac{2M}{\frac{1}{16}\pi d_1^3} = \frac{2M}{\frac{1}{16}\pi(\frac{4d}{3})^3} = \frac{13.5M}{\pi d_2^3}$$

$$\tau_{BC\max} = \frac{T_{BC}}{W_{pBC}} = \frac{M}{\frac{1}{16}\pi d_2^3} = \frac{16M}{\pi d_2^3}$$

比较得

$$\tau_{\max} = \frac{16M}{\pi d_2^3}$$

(3) 求 C 截面的转角；

$$\varphi_C = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{T_{AB}l_{AB}}{GI_{pAB}} + \frac{T_{BC}l_{BC}}{GI_{pBC}} = \frac{2Ml}{G\frac{1}{32}\pi\left(\frac{4d_2}{3}\right)^4} + \frac{Ml}{G\frac{1}{32}\pi d_2^4} = \frac{16.6Ml}{Gd_2^4}$$

十二、 如上题所示，若扭力偶矩 *M*=1 kNm，许用切应力[τ] =80 MPa，单位长度的许用扭转角[ϑ]=0.5 ^{0}/m，切变模量 *G*=80 GPa，试确定轴径。

解：(1) 考虑轴的强度条件；

$$\tau_{AB\max}=\frac{2M}{\frac{1}{16}\pi d_1^3}\le[\tau]\qquad \frac{2\times1\times10^6\times16}{\pi d_1^3}\le 80\qquad d_1\ge 50.3mm$$

$$\tau_{BC\max}=\frac{M}{\frac{1}{16}\pi d_2^3}\le[\tau]\qquad \frac{1\times10^6\times16}{\pi d_2^3}\le 80\qquad d_2\ge 39.9mm$$

(2) 考虑轴的刚度条件；

$$\theta_{AB}=\frac{M_{TAB}}{GI_{pAB}}\times\frac{180^0}{\pi}\le[\theta]\qquad \frac{2\times10^6\times32}{80\times10^3\times\pi d_1^4}\times\frac{180^0}{\pi}\times10^3\le0.5\qquad d_1\ge73.5\ mm$$

$$\theta_{BC}=\frac{M_{TBC}}{GI_{pBC}}\times\frac{180^0}{\pi}\le[\theta]\qquad \frac{1\times10^6\times32}{80\times10^3\times\pi d_2^4}\times\frac{180^0}{\pi}\times10^3\le0.5\qquad d_2\ge61.8\ mm$$

(3) 综合轴的强度和刚度条件，确定轴的直径；

$$d_1\ge73.5mm\qquad d_2\ge61.8mm$$

十三、在相同的强度条件下，用内外径之比 $d/D=0.5$ 的空心圆轴取代实心圆轴，可节省材料的百分比为多少？

解：设空心轴内外直径分别为 d_2,D_2，实心轴直径为 d_1

$$\frac{T}{\frac{\pi}{16}d_1^{\ 3}}=\frac{T}{\frac{\pi}{16}D_2^{\ 3}(1-\alpha^4)}\quad\Rightarrow\quad \frac{D_2}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-\alpha^4}}=1.02$$

节省材料 $\dfrac{A_1-A_2}{A_1}=1-\dfrac{D_2^{\ 2}(1-\alpha^2)}{d_1^{\ 2}}=21.7\%$

十四、直径 $d=25$ mm 的钢圆杆受轴向拉力 60 kN 作用时，在标距 0.2 m 的长度内伸长了 0.113 mm，受扭转力偶矩 0.15 kN·m 作用时，相距 0.2 m 两截面的相对扭转角为 0.55°，求钢材的弹性模量 *E*、切变模量 *G* 和泊松比 ν 。

解：$\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}=5.65\times10^{-4}$，$\quad\sigma=\dfrac{F_{\rm N}}{A}=122.2\ \text{MPa}$

则 $E=\sigma/\varepsilon=216\ \text{GPa}$

$$\tau=\frac{T}{W_{\rm p}}=48.89\ \text{MPa},\qquad \gamma=\frac{d/2}{l}\varphi\times\frac{\pi}{180}=6\times10^{-4}\ \text{rad}$$

解得 $G=81.5\ \text{GPa}$

又 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，得 $\nu=0.32$

十五、圆轴的直径 $d=50mm$，转速为 120r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60 MPa，试问所传递的功率为多大？

解：（1）计算圆形截面的抗扭截面模量：

$$W_p = \frac{1}{16}\pi d^3 = \frac{1}{16} \times 3.14159 \times 50^3 = 24544(mm^3)$$

（2）计算扭矩

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = 60N/mm^2$$

$$T = 60N/mm^2 \times 24544mm^3 = 1472640N \cdot mm = 1.473(kN \cdot m)$$

（3）计算所传递的功率

$$T = M_e = 9.549\frac{N_k}{n} = 1.473(kN \cdot m)$$

$$N_k = 1.473 \times 120 / 9.549 = 18.5(kW)$$

十六、某小型水电站的水轮机容量为 50 kW ，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力$[\tau] = 20MPa$ 。试校核轴的强度。

解：（1）计算最大工作切应力

$$\tau_{\max} = \frac{M_e}{W_p} = \frac{T}{W_p}$$

式中，$M_e = 9.549\frac{N_k}{n} = 9.549 \times \frac{50}{300} = 1.592(kN \cdot m)$ ；

$$W_p = \frac{1}{16}\pi d^3 = \frac{1}{16} \times 3.14159 \times 75^3 = 12566(mm^3)$$ 。

故：$\tau_{\max} = \frac{M_e}{W_p} = \frac{1592000N \cdot mm}{82835mm^3} = 19.219MPa$

（2）强度校核

因为$\tau_{\max} = 19.219MPa$ ，$[\tau] = 20MPa$ ，即$\tau_{\max} \le [\tau]$，所以轴的强度足够，不会发生破坏。

十七、直径$d = 25mm$ 的钢圆杆，受轴向拉 60kN 作用时，在标距为 200mm 的长度内伸长了 0.113mm。当其承受一对扭转外力偶矩$M_e = 0.2kN \cdot m$时，在标距为 200mm 的长度内相对扭转了 0.732^o 的角度。试求钢材的弹性常数 G、G 和ν 。

解：（1）求弹性模量 E

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$E = \frac{Nl}{A \cdot \Delta l} = \frac{60000N \times 200mm}{0.25 \times 3.14 \times 25^2 mm^2 \times 0.113mm} = 216447.8MPa = 216.448GPa$ （2）求剪切弹性模

量 G

$$I_p = \frac{1}{32}\pi d^4 = \frac{1}{32} \times 3.14159 \times 25^4 = 38349(mm^4)$$

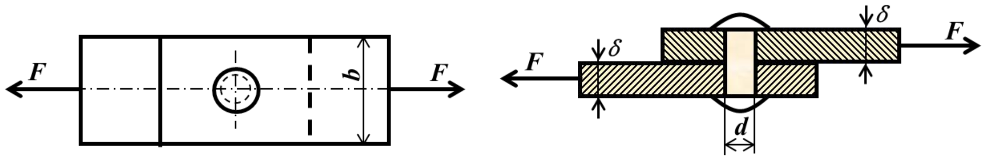
由 $\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_P}$ 得：

$$G = \frac{T \cdot l}{\varphi \cdot I_p} = \frac{0.2 \times 10^6 N \cdot mm \times 200mm}{(0.732 \times 3.14/180) \times 38349mm^4} = 81684.136MPa = 81.7GPa$$

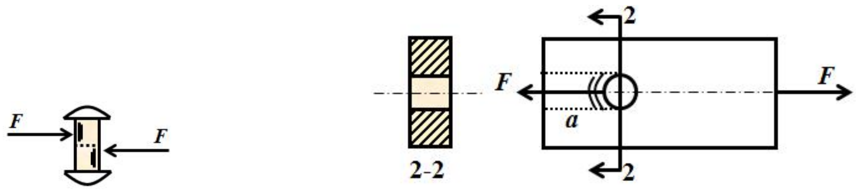
（3）泊松比 ν

由 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 得：$\nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{216.448}{2 \times 81.684} - 1 = 0.325$

十八、图示铆接接头受轴向拉力 F 作用，求该拉力的许可值。已知板厚δ=2mm，板宽 b=15mm,铆钉直径 d=4mm，许用切应力 [τ]=100MPa，许用挤压应力[σ_{bs}]=300MPa，许用拉应力[σ]=160MPa。



解：



解：接头破坏形式分析 铆钉的剪切破坏 铆钉与孔壁相互挤压，产生显著塑性变形

板沿被削弱的截面拉坏

板的剪切破坏，当 a≥2d 时，这种破坏形式可以避免，通常不考虑

剪切强度计算

$$t = \frac{F_S}{A} = \frac{4F}{pd^2} £ [t]$$

$$F £ \frac{pd^2}{4}[t] = \frac{p ´ 4^2}{4} ´ 100N = 1257N » 1.26kN$$

挤压强度计算

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{A_{bs}} = \frac{F}{d\delta} \le [\sigma_{bs}]$$

$$F \le d\delta[\sigma_{bs}] = 4\times 2\times 300N = 2400N = 2.40kN$$

剪切强度计算　$F \le 1.26kN$　　挤压强度计算　$F \le 2.40kN$

板(杆)拉伸强度计算

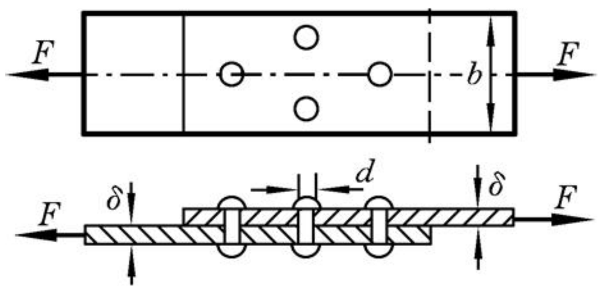
$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A_{\min}} = \frac{F}{(b-d)\delta} \le [\sigma]$$

$$F \le (b-d)\delta[\sigma] = (15-4)\times 2\times 160N$$
$$= 3520N = 3.52kN$$

接头的许用拉力为

$$[F] = \min(1.26kN, 2.40kN, 3.52kN)$$
$$= 1.26kN$$

十九、图示接头，由两块钢板用四个直径相同的钢铆钉连接而成。已知载荷 F=80kN，板宽 b=80mm，板厚 δ =10mm，铆钉直径 d =16mm，许用切应力[τ]=100MPa，许用挤压应力[σ bs]=300MPa,许用拉应力[σ]=170MPa 。试校核接头的强度。(提示：设每个铆钉受力相同)



解：剪切强度计算：外力过截面组中心，每个铆钉受力相同

$$F_s = \frac{F}{4} = 20kN$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{4F_s}{\pi d^2} = \frac{4\times 20\times 10^3}{\pi\times 16^2} = 99.5MPa < [\tau]$$

挤压强度计算：铆钉与钢板材料相同，挤压面为圆柱面

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{A_{bs}} = \frac{F/4}{d\delta} = \frac{20\times 10^3}{16\times 10} = 125MPa < [\sigma_{bs}]$$

拉伸强度计算：可能的危险截面为 1-1 和 2-2 截面

$$\sigma_{1-1} = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{3/4\times F}{(b-2d)\delta} = \frac{3\times 80\times 10^3}{4\times(80-2\times 16)\times 10} = 125MPa < [\sigma]$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{F}{(b-d)\delta} = \frac{80\times 10^3}{(80-16)\times 10} = 125MPa < [\sigma]$$

综上，接头满足强度要求

二十、已知实心圆轴的转速 $n = 300r/\min$，传递的功率 $p = 330kW$，轴材料的许用切应力 $[\tau] = 60MPa$，切变模量 $G = 80GPa$。若要求在 2m 长度的相对扭转角不超过 1^o，试求该轴的直径。

解：$\varphi = \dfrac{T \cdot l}{GI_P} = \dfrac{M_e l}{GI_p} \le 1 \times \dfrac{\pi}{180}$

式中，$M_e = 9.549\dfrac{N_k}{n} = 9.549 \times \dfrac{330}{300} = 10.504(kN \cdot m)$；$I_p = \dfrac{1}{32}\pi d^4$。故：

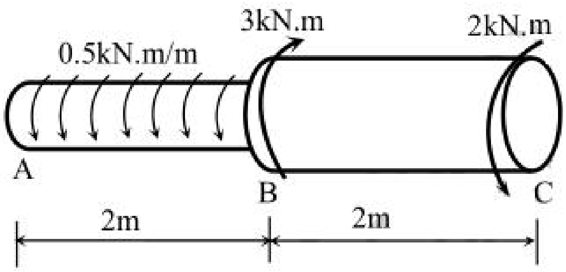
$$I_p \ge \frac{180 M_e l}{\pi G}$$

$$\frac{1}{32}\pi \cdot d^4 \ge \frac{180 M_e l}{\pi G}$$

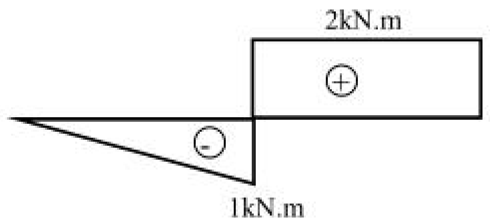
$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 M_e l}{\pi^2 G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 \times 10.504 \times 10^6 N \cdot mm \times 2000mm}{3.14^2 \times 80000 N/mm^2}} = 111.292mm$$

取 $d = 111.3mm$。

二十一、阶梯轴受力如图所示，已知 AB 段直径 d_1=40mm，BC 段直径 d_2=80mm，材料的切变模量 G=80GPa。试求：1.画出圆轴的扭矩图；2.轴上的最大切应力；3. 截面 C 相对于截面 A 的扭转角。



解：1、扭矩图



2、轴上的最大切应力：79.58MPa

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{P1}} = \frac{16T_1}{\pi d_1^3} = \frac{16\times1\times10^3}{\pi\times0.04^3} = 79.58\text{MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_{P2}} = \frac{16T_2}{\pi d_2^3} = \frac{16\times2\times10^3}{\pi\times0.08^3} = 19.89\text{MPa}$$

3、截面 C 相对于截面 A 的扭转角

$$I_{P1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi\times0.04^4}{32} = 2.513\times10^{-7}\,\text{m}^4$$

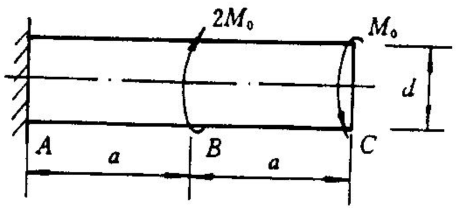
$$I_{P2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi\times0.08^4}{32} = 4.021\times10^{-6}\,\text{m}^4$$

$$\varphi_{AB} = -\int_0^2 \frac{T_1(x)}{GI_{P1}}dx = -\int_0^2 \frac{0.5x\times10^3}{80\times10^9\times2.513\times10^{-7}}dx = -0.0497rad$$

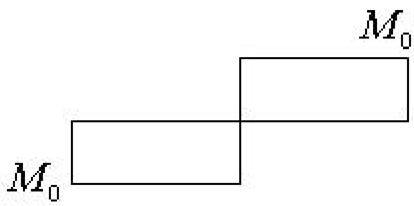
$$\varphi_{BC} = \frac{T_2 l_2}{GI_{P2}} = \frac{2\times2\times10^3}{80\times10^9\times4.02\times10^{-6}} = 0.0124rad$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = -0.0373rad$$

二十二、如图所示圆截面轴，B 截面上有 $2M_0$ 作用，C 截面有力偶 M_0 作用，圆截面的直径为 d，试求 C 截面相对 A 截面的扭转角φ_{CA}和整个圆轴最大扭转剪应力τ_{max}。



解： 轴的扭矩图为：

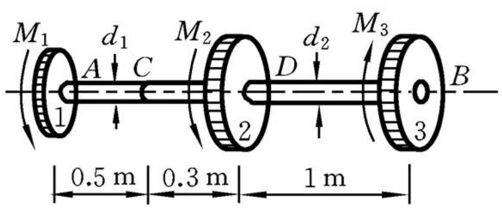


则扭转角 $f_{CA} = \mathring{a}\ f_i = \frac{(-M_0)a}{GI_p} + \frac{M_0 a}{GI_p} = 0$

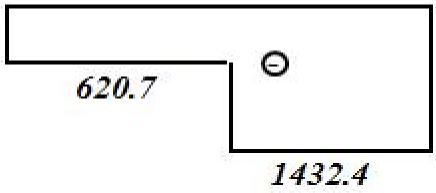
整个圆轴最大扭转剪应力τ_{max}

$$t_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} = \frac{M_0}{pd^3/16} = \frac{16M_0}{pd^3}$$

二十三、图示阶梯形圆轴，装有三个皮带轮，轴径 d1=40mm、d2=70mm。已知由轮 3 输入的功率 P3=30kW，由轮 1 和轮 2 输出的功率分别为 P1=13kW 和 P2=17kW，轴的转速 n=200r/min，材料的许用切应力[τ]=60MPa，切变模量 G=80GPa，许用扭转角[θ]=2°/m，试校核该轴的强度与刚度。



解：



T: (*Nm*)

计算扭力矩：

$$M_1 = 9549\frac{P_1}{n} = 9549' \ \frac{13}{200} = 620.7Nm$$

$$M_2 = 9549\frac{P_2}{n} = 9549' \ \frac{17}{200} = 811.7Nm$$

$$M_3 = 9549\frac{P_3}{n} = 9549' \ \frac{30}{200} = 1432.4Nm$$

作扭矩图，危险截面在 AC 段或 DB 段：

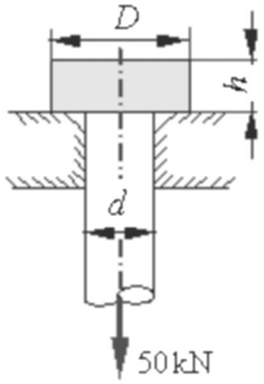
$$t_{\max 1} = \frac{T_{AC}}{W_{pAC}} = \frac{620.7' \ 16}{p' \ 0.04^3} = 49.4MPa < [t]$$

$$t_{\max 2} = \frac{T_{DB}}{W_{pDB}} = \frac{1432.4' \ 16}{p' \ 0.07^3} = 21.3MPa < [t]$$

$$q_{\max} = \frac{T_{AC}}{GI_{pAC}}' \ \frac{180^\circ}{p} = \frac{32创620.7 \quad 180^\circ}{80创10^9 \quad p创0.04^4 \quad p} = 1.77^\circ / m < [q]$$

该轴满足强度与刚度要求。

二十四、试校核图示拉杆头部的剪切强度和挤压强度。已知图中尺寸 $D = 32mm$， $d = 20mm$ 和 $h = 12mm$ ，杆的许用切应力 $[\tau] = 100MPa$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 240MPa$ 。



解：剪切面为圆柱面，所受的剪力为：$Q = 50kN$ 。

$$\tau = \frac{F_S}{A_s} = \frac{50\times10^3}{\pi\, dh} = \frac{50\times10^3}{\pi\times20\times12\times10^{-6}} = 66.3\,\mathrm{MPa} < [\tau]$$

不会发生剪切破坏。

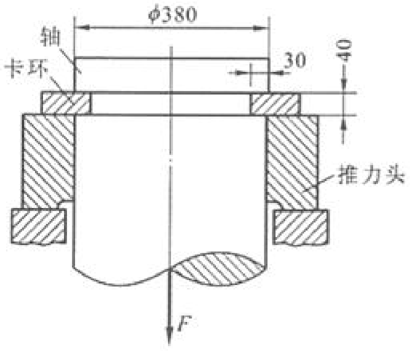
挤压面为水平的圆环面，挤压力为：

$$\sigma_C = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{50\times10^3}{\frac{\pi}{4}(32^2-20^2)\times10^{-6}} = \frac{200\times10^9}{\pi\times625} = 102\,\mathrm{MPa} < [\sigma_{bs}]$$

不会发生挤压破坏。

综上所述，该构件能安全工作。

二十五、水轮发电机组的卡环尺寸如图所示。已知轴向荷载 $F=1450kN$ ，卡环材料的许用切应力 $[\tau]=80MPa$ ，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=150MPa$ 。试校核卡环的强度。



解：剪切面 ： $A_s=3.14\times380\times40\times10^{-6}m^2$

$$\tau=\frac{1450\times10^3N}{47728\times10^{-6}m^2}=30.38\times10^6Pa=30.38MPa<[\tau]$$

不会发生剪切破坏。

挤压面积为： $$A_{bs}=\frac{\pi(380^2-320^2)\times10^{-6}}{4}=33.1\times10^{-3}m^2$$

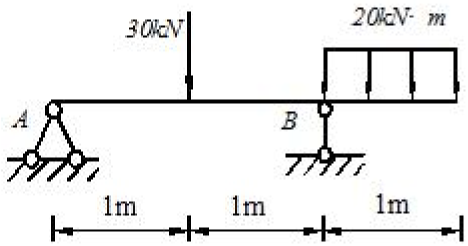
$$\sigma_{bs}=\frac{1450\times10^3}{33.1\times10^{-3}}=44\mathrm{MPa}<[\sigma_{bs}]$$

不会发挤压破坏。

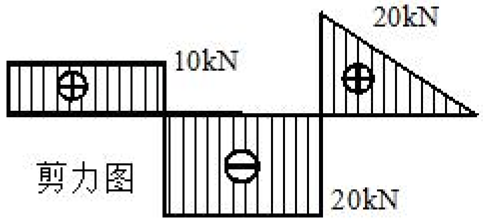
综上所述，卡环能安全工作。

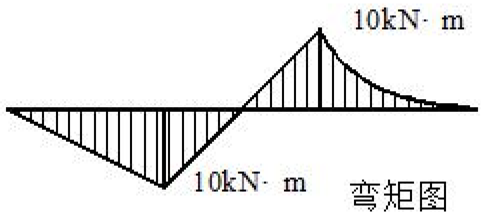
第 4 章　梁的内力

一、画出图示外伸梁的剪力图和弯矩图。

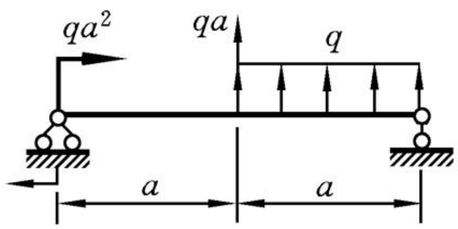


解：

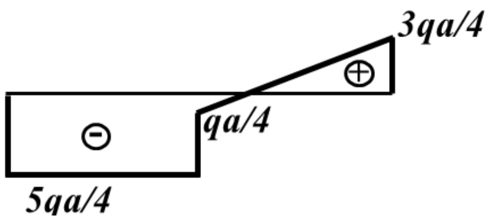




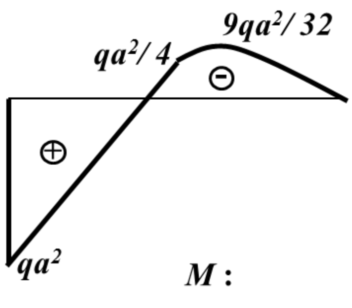
二、画出图示外伸梁的剪力图和弯矩图。



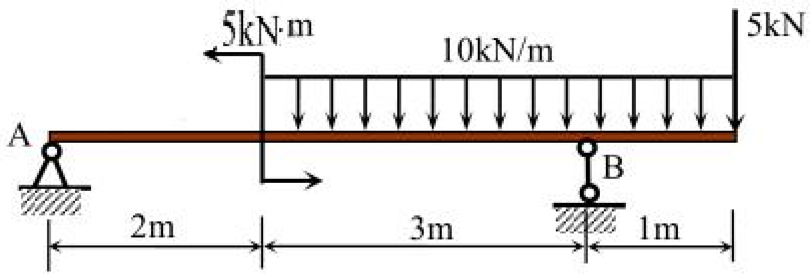
解：1）剪力图



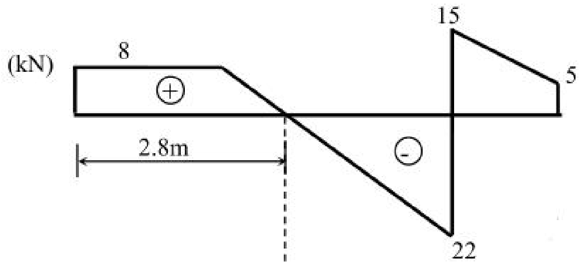
2）弯矩图



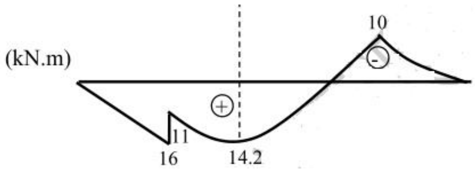
三、画出图示外伸梁的剪力图和弯矩图。



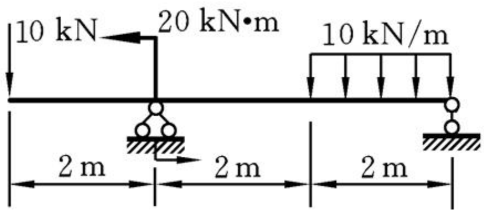
解： 1、剪力图



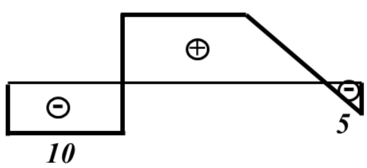
2、弯矩图



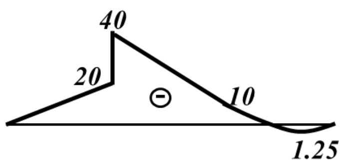
四、画出图示外伸梁的剪力图和弯矩图。11-2



解：

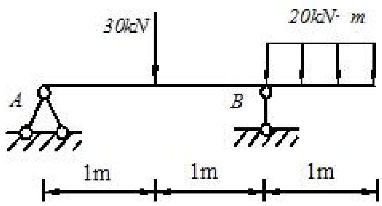


1、剪力图

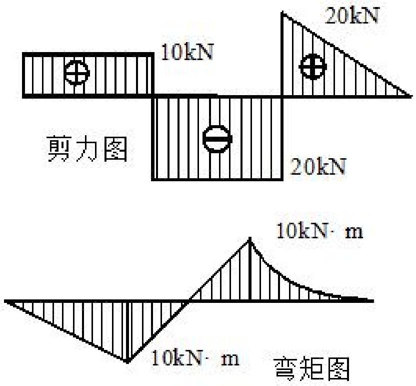


2、弯矩图

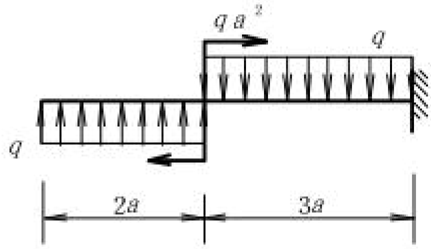
五、画出图示外伸梁的剪力图和弯矩图。



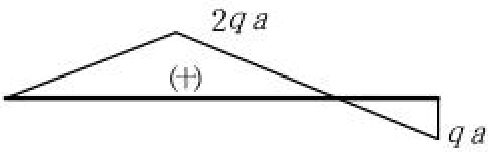
解：



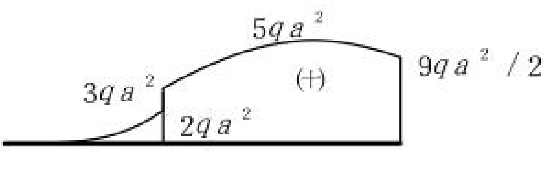
六、画出图示梁的剪力图和弯矩图



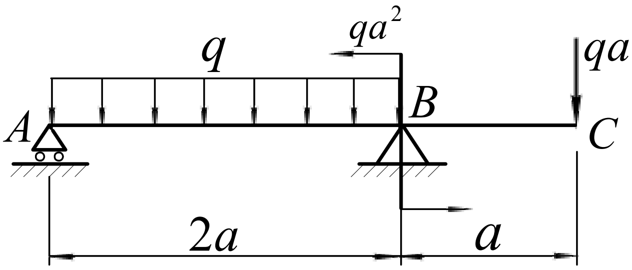
解：剪力图



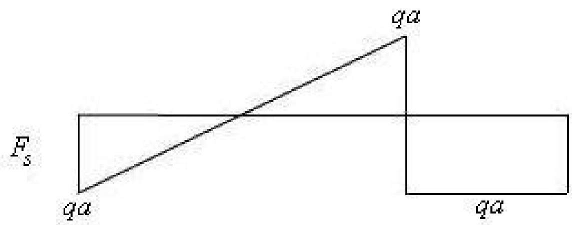
弯矩图



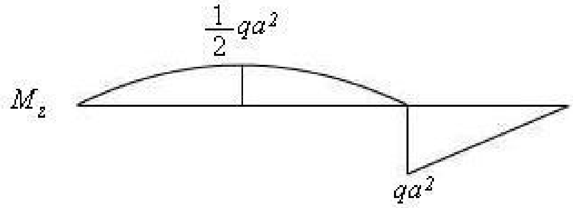
七、画图示结构的剪力图和弯矩图。



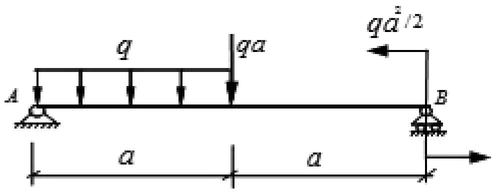
解：剪力图



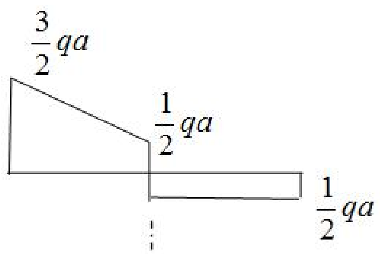
弯矩图



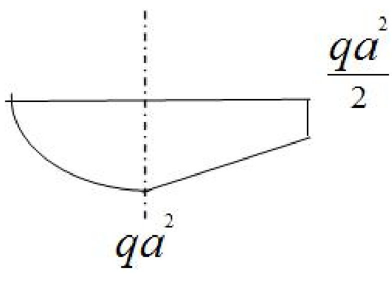
八、画出图示梁的剪力图和弯矩图。



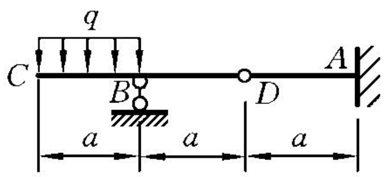
解：1、剪力图：



2、弯矩图：



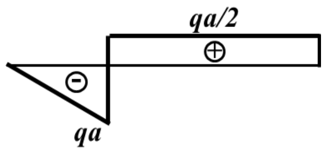
九、画图示结构的剪力图和弯矩图。



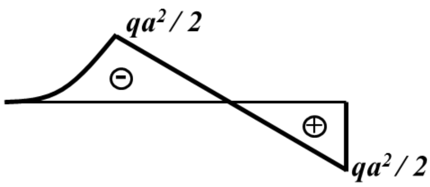
（d）

解：

1、剪力图：



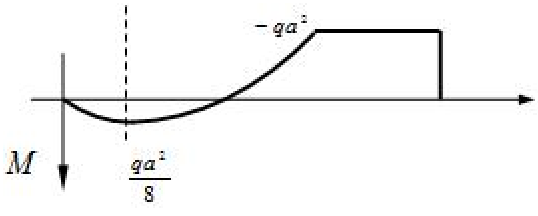
2、弯矩图：



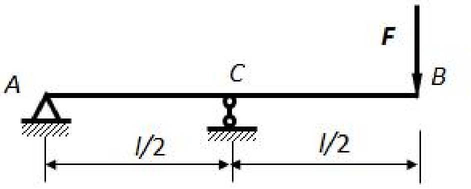
十 、 画出图示梁的剪力图和弯矩图。

解：剪力图

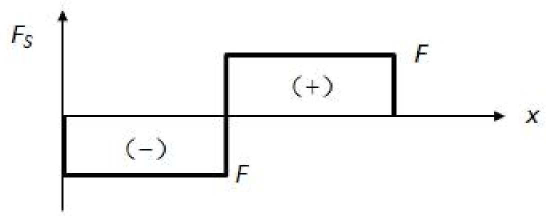
弯矩图

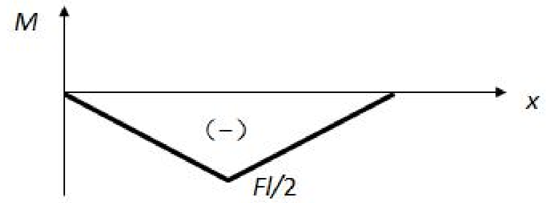


十一、画下图所示结构的剪力与弯矩图。

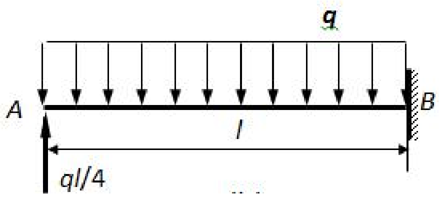


解：

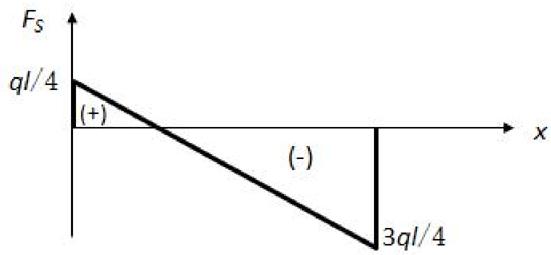


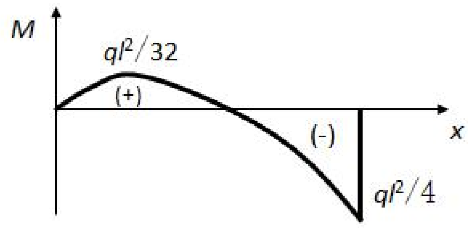


十二、画下图所示结构的剪力与弯矩图。



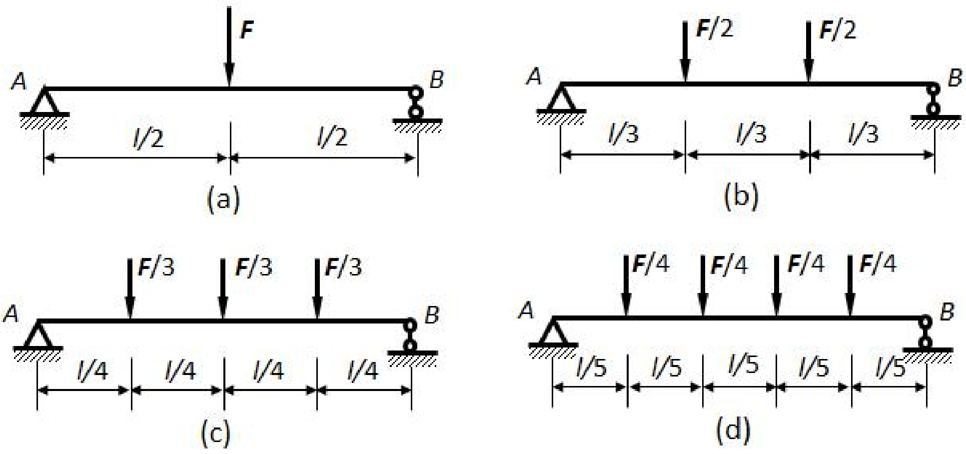
解：



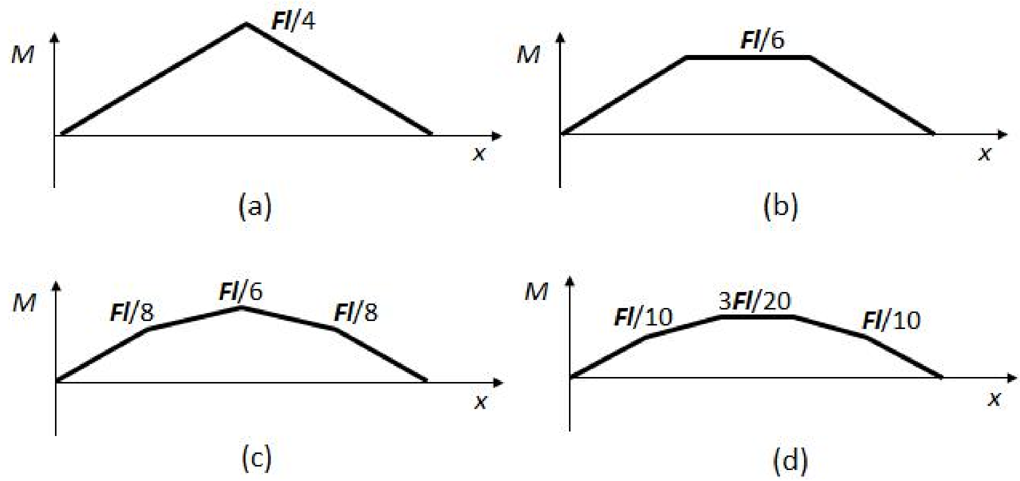


十三、图示简支梁，载荷 *F* 可按四种方式作用于梁上，试分别画弯矩图，并从强度方面考虑，指出何种加

载方式最好。

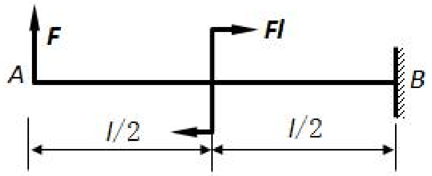


解：各梁约束处的反力均为 $F/2$，弯矩图如下：

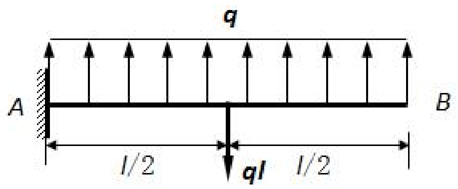


由各梁弯矩图知：(d)种加载方式使梁中的最大弯矩呈最小，故最大弯曲正应力最小，从强度方面考虑，此种加载方式最佳。

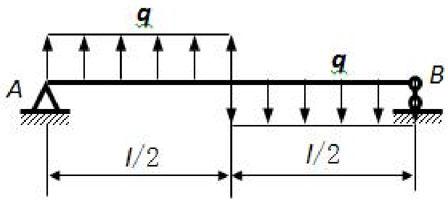
十四、图示各梁，试利用剪力、弯矩与载荷集度的关系画剪力与弯矩图。



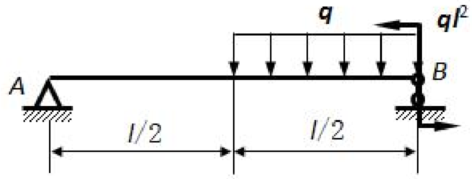
(a)



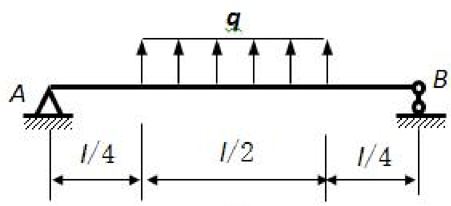
(b)



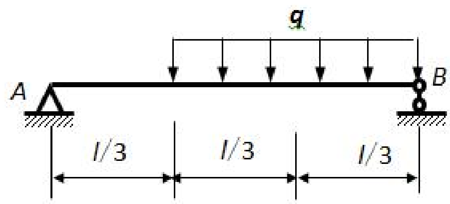
(c)



(d)



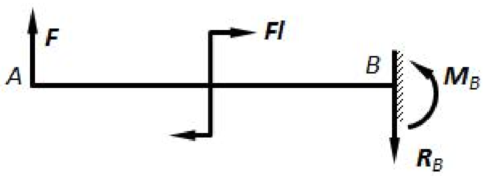
(e)



(f)

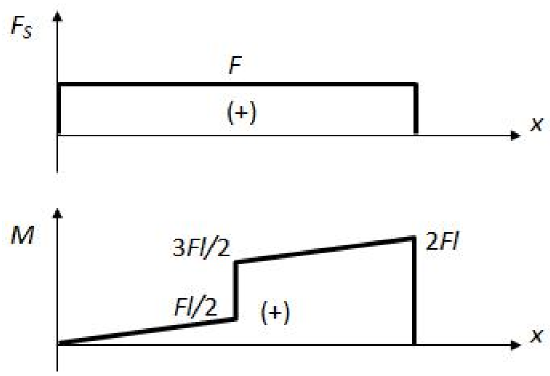
解：(a)

(1) 求约束力；



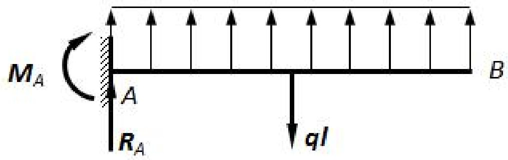
$$R_B = F \qquad M_B = 2Fl$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



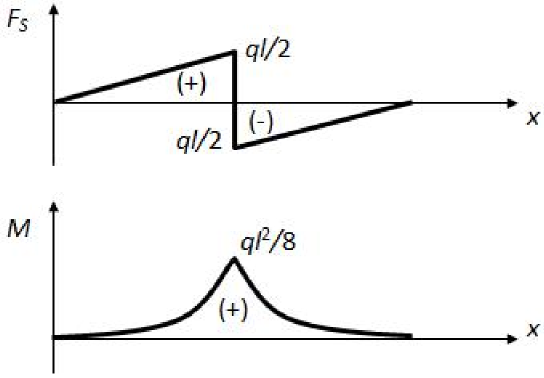
(b)

(1) 求约束力；



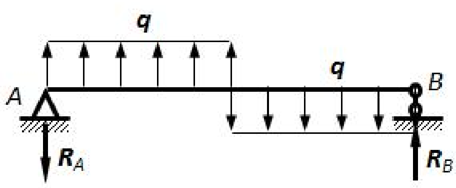
$$R_A = 0 \qquad M_A = 0$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



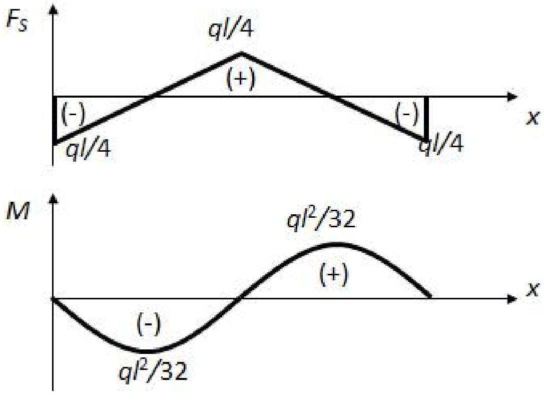
c)

(1) 求约束力；



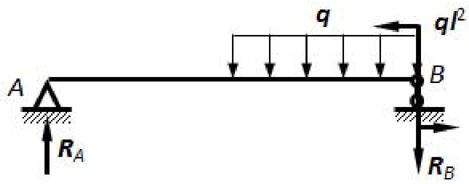
$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



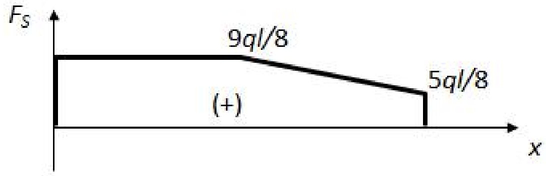
(d)

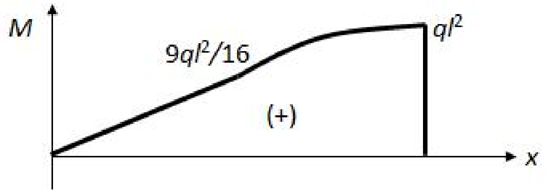
(1) 求约束力；



$$R_A = \frac{9ql}{8} \qquad R_B = \frac{5ql}{8}$$

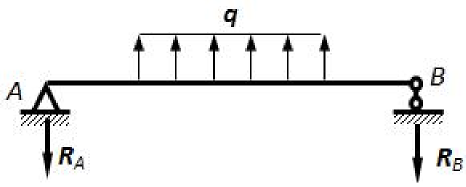
(2) 画剪力图和弯矩图；





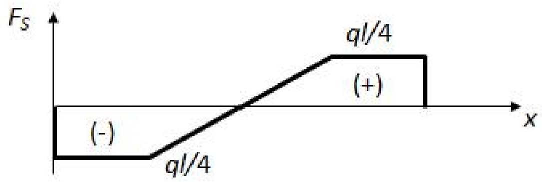
(e)

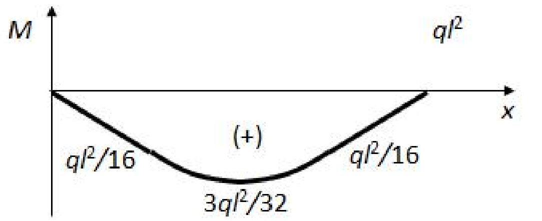
(1) 求约束力；



$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}$$

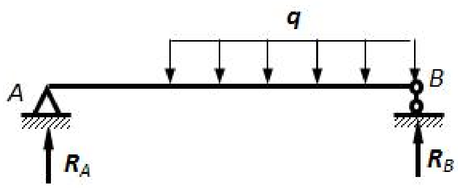
(2) 画剪力图和弯矩图；





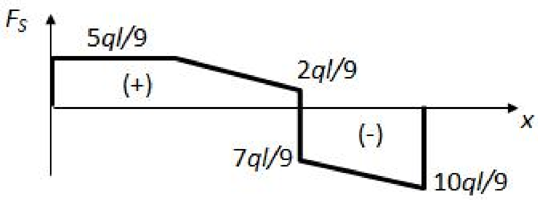
(f)

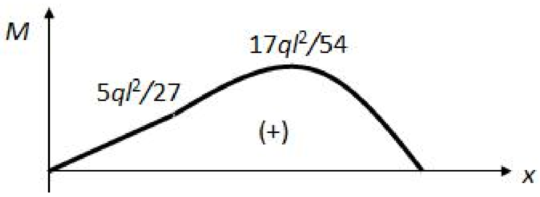
(1) 求约束力；



$$R_A = \frac{5ql}{9} \qquad R_B = \frac{10ql}{9}$$

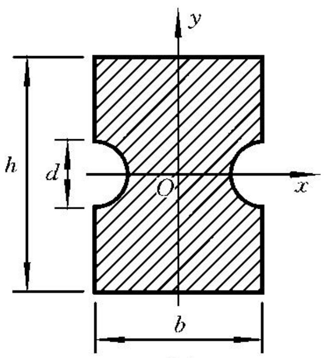
2) 画剪力图和弯矩图；





第 5 章　截面的几何性质

一、试求图示平面图形对 x 轴和 y 轴的惯性矩。



(b)

解：组合图形，可视为矩形挖去两个半圆

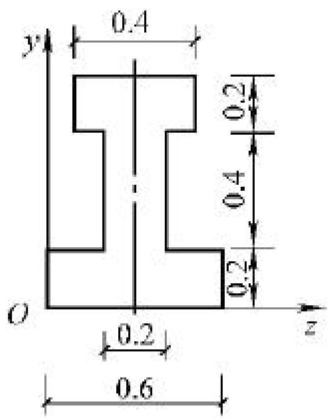
$$I_x = I_{x1} - 2I_{x2} = \frac{bh^3}{12} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^4}{64} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_y = I_{y1} - 2I_{y2} = I_{y1} - 2(I_{y_0 2} + b_{y_0}^2 A_2)$$

$$= \frac{hb^3}{12} - 2\cdot[(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})\cdot\frac{d^4}{16} + (\frac{b}{2} - \frac{2d}{3\pi})^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}]$$

$$= \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi b^2 d^2}{16} + \frac{bd^3}{6}$$

二、试求图示平面图形的形心位置，并计算平面图形对 Z 轴的静矩。(单位：m)



解：图形的面积为

$$A = 0.2\times0.4 + 0.4\times0.2 + 0.2\times0.6 = 0.28\text{m}^2$$

对 Z 轴的静距为

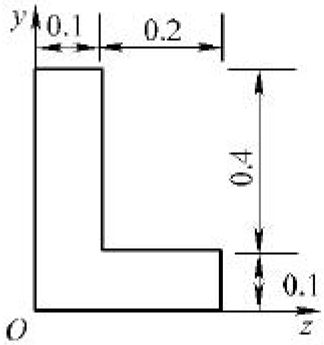
$$S_z = \sum_{i=1}^{3} A_i\overline{y} = 0.2\times0.4\times0.7 + 0.4\times0.2\times0.4 + 0.2\times0.6\times0.1 = 0.1\text{m}^3$$

形心坐标为

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{0.1}{0.28} = 0.357\text{m}$$

$$z_C = 0.3\text{m}$$

三、试求图示平面图形的形心位置，并计算平面图形对 Z 轴的静矩。(单位：m)



解：图形的面积为

$$A = 0.1\times0.3 + 0.1\times0.4 = 0.07\text{m}^2$$

对 Z 轴的静距为 $S_z = \sum_{i=1}^{2} A_i\bar{y} = 0.4\times0.1\times\left(0.1+{}^{0.4}\!/\!_{2}\right) + 0.1\times0.3\times\left({}^{0.1}\!/\!_{2}\right) = 0.0135\text{m}^3$

对 Y 轴的静距为

$$S_Y = \sum_{i=1}^{2} A_i\bar{z} = 0.4\times0.1\times\left({}^{0.1}\!/\!_{2}\right) + 0.1\times0.3\times\left[{}^{(0.1+0.2)}\!/\!_{2}\right] = 0.0065\text{m}^3$$

形心坐标为

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{0.0135}{0.07} = 0.193\text{m}$$

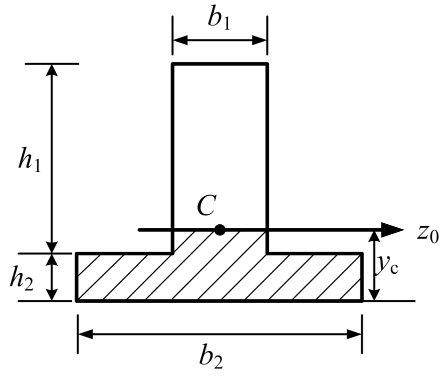
$$z_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{0.0065}{0.07} = 0.093\text{m}$$

四、在图示的对称倒 T 形截面中，$b_1 = 0.3$ m，$b_2 = 0.6$ m，$h_1 = 0.5$ m $h_2 = 0.14$ m。

(1) 求形心 C 的位置；

(2) 求阴影部分对 z_0 轴的静矩；

(3) 问 z_0 轴以上部分的面积对 z_0 轴的静矩与阴影部分对 z_0 轴的静矩有何关系?



解：(1) 图形的面积为

$A = 0.5\times 0.3 + 0.6\times 0.14 = 0.234\mathrm{m}^2$

对 Z 轴的静距为

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} A_i\overline{y} = 0.3\times 0.5\times(0.25+0.14) + 0.6\times 0.14\times\left(0.14/2\right) = 0.06438\mathrm{m}^3$$

形心坐标为

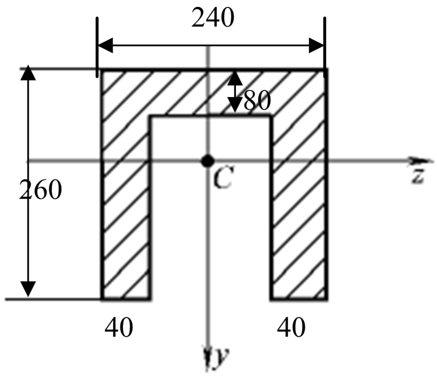
$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{0.06438}{0.234} = 0.275\mathrm{m}$$

（2）求阴影部分对 z_0 轴的静距为

$$S_{z_0} = \sum_{i=1}^{2} A_i\overline{y} = 0.6\times 0.14\times\left(0.14/2 + (0.275-0.14)\right) + 0.3\times(0.275-0.14)^2\times\frac{1}{2} = 2\times 10^{-2}\mathrm{m}^3$$

（3）z_0 轴以上部分的面积对 z_0 轴的静矩与阴影部分对 z_0 轴的静矩关系为：经过计算得出相等。

五、试求图示平面图形对形心轴的惯性轴。



解：对 z_1 的静距为

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^{3} A_i\overline{y} = 260\times 40\times 130\times 2 + 80\times(240-2\times 40)\times(260-80+40) = 3086400\mathrm{m}^3$$

形心的坐标为：

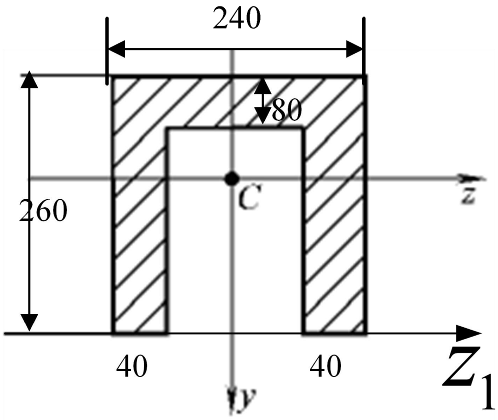
$$Z_C = \frac{S_z}{A} = \frac{3086400}{260\times 40\times 2 + 160\times 80} = 91.9\mathrm{m}$$

由平行移轴公式得

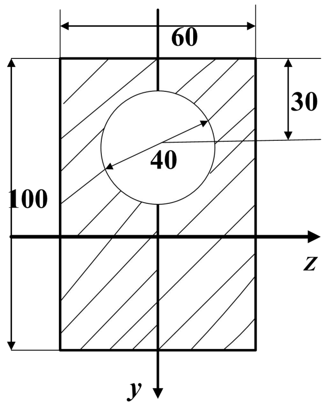
$$\mathrm{I}_{Z_C} = 2\left(\mathrm{I}_{Z_{C1}} + \mathrm{a}_{c1}^2 \bullet A_1\right) + \mathrm{I}_{Z_{C2}} + \mathrm{a}_{c2}^2 \bullet A_2$$

$$= 2\left(\frac{40\times 260^3}{12} + (130-91.9)^2\times 260\times 40\right) + \frac{160\times 80^3}{12} + (220-91.9)^2\times 160\times 80$$

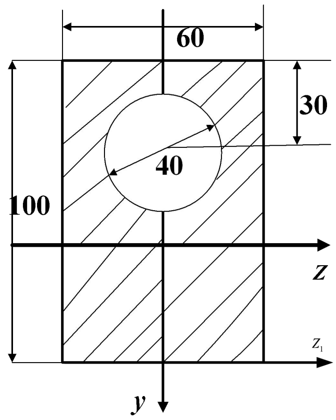
$$= 18818.56\mathrm{cm}^4$$



六、试求图示平面图形对形心轴的惯性轴。



解：首先计算对 Z_1 的静距以求的形心轴 Z 的惯性矩：



1. 计算静距为

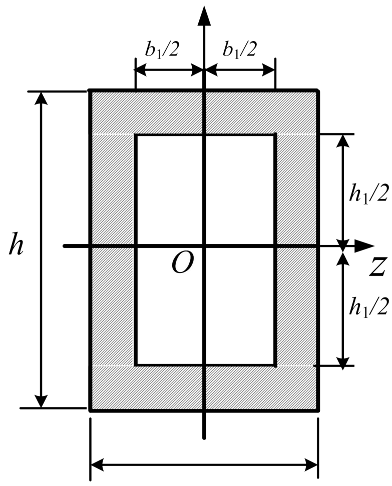
$$S_{Z_1}=\sum A_i y_i=-\frac{\pi\times 40^2}{4}\times 70+100\times 60\times 50=298744\text{mm}^3$$

由此计算形心轴为 $\bar{y}=\dfrac{S_{Z_1}}{\sum A_i}=\dfrac{298744\text{m}^3}{100\times 60-\dfrac{\pi\times 40^2}{4}}=63\text{mm}$

有平行移轴公式得

$$I = I_{ZC1} + a^2 A_1 + I_{ZC2} + b^2 A_2$$
$$= \frac{60\times100^3}{12} + (50-63)^2 \times 60\times100 + -\frac{\pi\times40^4}{64} + (70-63)^2 \times \left(\frac{\pi\times40^2}{4}\right)$$
$$= 428.15\text{cm}^4$$

七、 图示为一箱形截面，*z* 轴过形心且平行于底边，求截面对 *z* 轴的惯性矩。



解：由于图形具有对称性和平行移轴公式得

$$\mathrm{I}_Z = 2\left(\mathrm{I}_{Z_{C1}} + \mathrm{I}_{Z_{C2}} + \mathrm{a}_{c2}^2 \bullet A_2\right)$$
$$= 2\left(\left(\frac{b}{2}-\frac{b_1}{2}\right)\bullet h^3 \Big/ 12 + \frac{b_1}{2}\bullet\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)^3 \Big/ 12 + \left(\frac{h}{4}+\frac{h_1}{4}\right)^2 \times \frac{b_1}{2} \times \left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right) \right)$$
$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}$$

得 $I_z = \dfrac{bh^3}{12} - \dfrac{b_1 h_1^3}{12}$

八、求图示平面图形中阴影部分对 z 轴的静矩。

$$S_Z = b\cdot 0.4h\cdot(0.6h+0.2h) = 0.32bh^2$$

$$S_Z = B\cdot\frac{H-h}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}+\frac{H-h}{4}\right)+b\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}=\frac{B\left(H^2-h^2\right)}{8}+\frac{bh^2}{8}$$

九、求图示平面图形对 z、y 轴的惯性矩。

$$I_Z = I_I + I_{II} = \frac{10\cdot 30^3}{12}+40\cdot 10\cdot 25^2+\frac{40\cdot 10^3}{12}+40\cdot 10\cdot 5^2$$
$$= 2.23\times 10^5\, mm^4$$

由于图形对称，$I_Y = I_Z == 2.23\times 10^5\, mm^4$

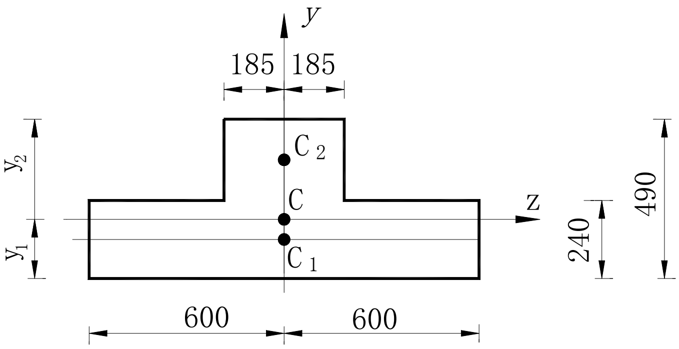
十、试求图示平面图形的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

$$y_C = \frac{10\cdot 20\cdot 90+20\cdot 100\cdot 10}{140\cdot 20+20\cdot 100} = 56.7mm$$

$$I_Z = I_I + I_{II} = \frac{20\cdot 140^3}{12}+140\cdot 20\cdot 33.3^2+$$
$$\frac{100\cdot 20^3}{12}+10.0\cdot 20\cdot 46.7^2 = 1.21\times 10^7\, mm^4$$

$$I_Y = \frac{140\cdot 20^3}{12}+\frac{20\cdot 100^3}{12} = 1.76\times 10^6\, mm^4$$

十一、 图示砌体 T 形截面，当 B=1200mm, b=370mm，D=490mm 时，（1）试计算图形的形心位置参数 y_1、y_2；（2）试计算图形对形心轴和 y 轴的惯性矩及其相应的回转半径。



解：（1）计算图形的形心位置参数 y_1、y_2

建立图示坐标，则图形的形心在 y 轴上。

$$y_C=y_1=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A}=\frac{370\times250\times(240+\frac{250}{2})+240\times1200\times120}{370\times250+240\times1200}\text{mm}=179.6\text{mm}=y_1$$

$$y_2=490-y_1=490-179.6=310.4\text{mm}$$

（2）计算图形对形心轴惯性矩及其回转半径

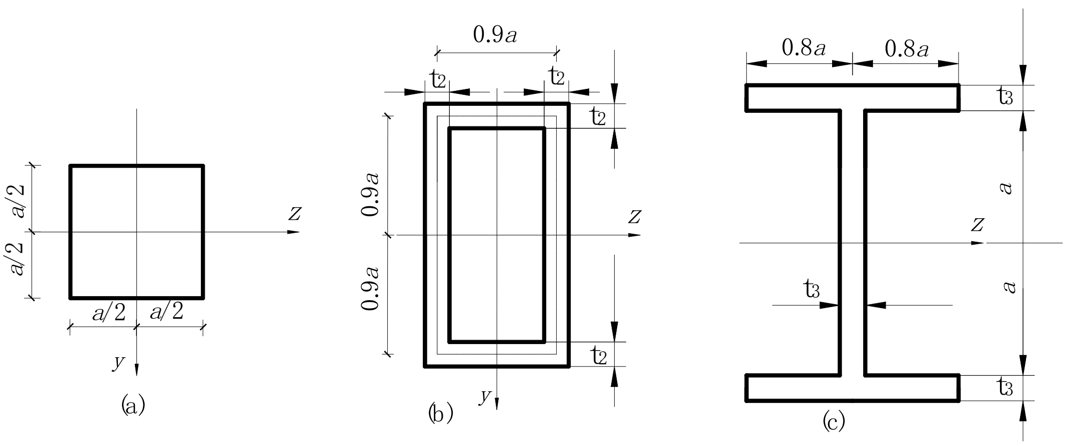
$$I_z=I_z^1+I_z^2=\frac{1200\times240^3}{12}+1200\times240\times(179.6-\frac{240}{2})^2+\frac{370\times250^3}{12}+370\times250\times(310.4-\frac{250}{2})^2=6.067\times10^9\text{mm}^4$$

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{6.067\times10^9}{1200\times240+250\times370}}=126.3\text{mm}$$

$$I_y=I_y^1+I_y^2=\frac{240\times1200^2}{12}+\frac{(490-240)\times(185\times2)^2}{12}=3.562\times10^{10}\text{mm}^4$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{3.562\times10^{10}}{1200\times240+250\times370}}=305.9\text{mm}$$

十二、图示矩形、箱形和工字形截面的面积相同，试求它们对形心轴 z 的惯性矩。



题5-4图

解：（1）矩形

$$I_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{a^4}{12}$$

（2）箱形

箱形与方形面积，即：$a^2=6bt_2=5.4at_2\rightarrow t_2=\frac{a}{5.4}$

$$I_z=\frac{(b+t_2)(2b+t_2)^3}{12}-\frac{(b-t_2)(2b-t_2)^3}{12}=\frac{(0.9a+\frac{a}{5.4})(1.8a+\frac{a}{5.4})^3}{12}-\frac{(0.9a-\frac{a}{5.4})(1.8a-\frac{a}{5.4})^3}{12}$$
$$=0.4567a^4$$

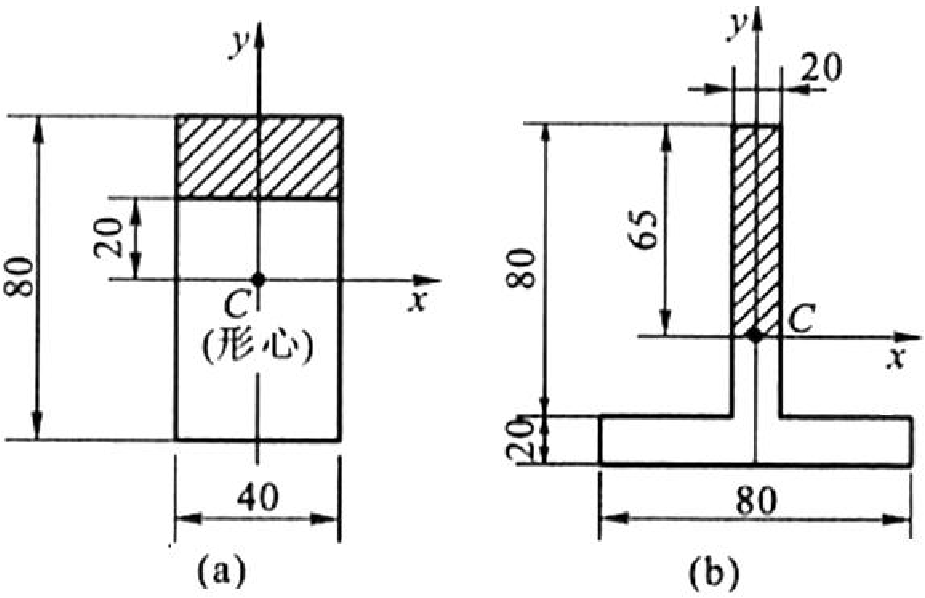
（3）工字形截，即：面 $a^2=2\times1.6at_3+2at_3\rightarrow t_3=\frac{a}{5.2}$

工字形截面方形面积

$$I_z=\frac{1.6a(2a+2t_3)^3}{12}-\frac{(1.6a-t_3)8a^3}{12}=\frac{1.6a(2a+2\times\frac{a}{5.2})^3}{12}-\frac{(1.6a-\frac{a}{5.2})8a^3}{12}$$
$$=0.8695a^4$$

$$I_{z方}\text{：}I_{z箱}\text{：}I_{z工}=\frac{1}{12}:0.4567:0.8695=1:5.48:10.43$$

十三、试求图示各截面的阴影线面积对 X 轴的静积。



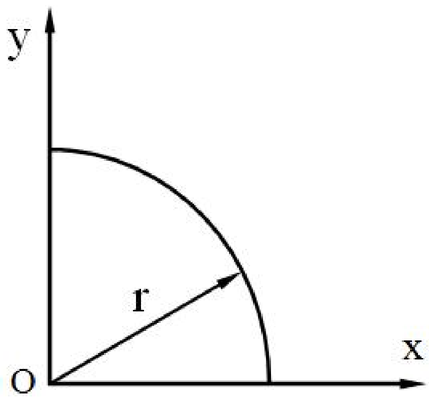
解：（a）

$$S_x=A\cdot y_c=(40\times20)\times(20+10)=24000(mm^3)$$

（b）

$$S_x=A\cdot y_c=(20\times65)\times\frac{65}{2}=42250(mm^3)$$

十四、试求图示四分之一圆形截面对于 x 轴和 y 轴的惯性矩 I_x 、 I_y 和惯性积 I_{xy} 。



解：用两条半径线和两个同心圆截出一微分面积如图所示。

$dA = (xd\theta)\cdot dx$；微分面积的纵坐标：$y = x\sin\theta$；微分面积对 x 轴的惯性矩为：

$$dI_x = y^2 dA = y^2(xd\theta\cdot dx) = x^2\sin^2\theta\cdot xd\theta\cdot dx = x^3\sin^2\theta\cdot dxd\theta$$

四分之一圆对 x 轴的惯性矩为：

$$I_x = \int_0^r x^3 dx\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta = [\frac{x^4}{4}]_0^r\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \quad = \frac{r^4}{4}\cdot\frac{1}{2}[\int_0^{\pi/2}d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d(2\theta)]$$

$$= \frac{r^4}{8}\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[\sin 2\theta]_0^{\pi/2}\}$$

$$= \frac{\pi\cdot r^4}{16}$$

由圆的对称性可知，四分之一圆对 y 轴的惯性矩为：

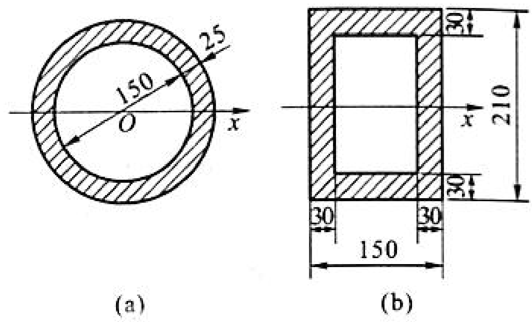
$$I_y = I_x = \frac{\pi\cdot r^4}{16}$$

微分面积对 x 轴、y 轴的惯性积为：

$$dI_{xy} = xydA$$

$$I_{xy} = \int_0^r xdx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} ydx = \int_0^r \frac{1}{2}x(r^2-x^2)dx = \frac{1}{2}[\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^r = \frac{1}{2}(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}) = \frac{r^4}{8}$$

十五、分别求图示环形和箱形截面对其对称轴 x 的惯性矩。



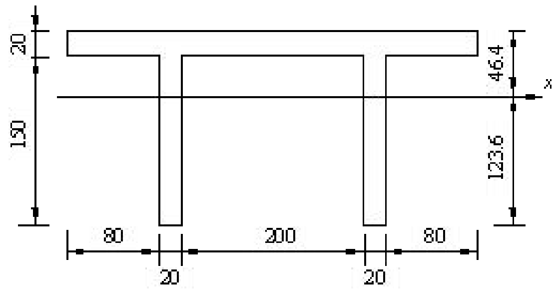
(a)

解：$I_x = \frac{1}{64}\pi D^4(1-\alpha^2) = \frac{1}{64}\times 3.14\times 175^4[1-(\frac{150}{175})^4] = 21177368(mm^4)$

(b)

$$I_x = \frac{1}{12}\times 150\times 210^3 - \frac{1}{12}\times 90\times 150^3 = 90449999(mm^4)$$

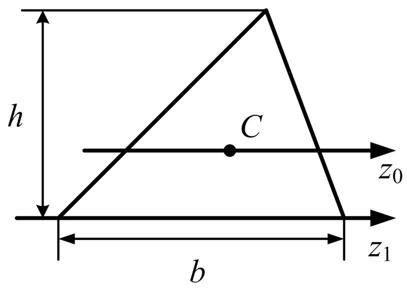
十六、求如图所示截面对其水平形心轴 x 的惯性矩。



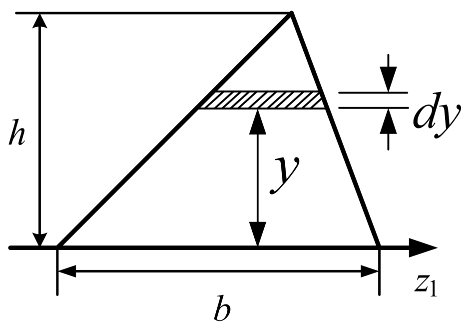
解：形心轴 x 位置及几何尺寸如图所示。惯性矩 I_x 计算如下：

$$I_x = \frac{1}{12}\times 400\times 20^3 + 400\times 20\times 36.4^3 + 2\times\frac{1}{12}\times 20\times 150^3 +$$
$$2\times 20\times 150\times(123.6-75)^2 = 3.63\times 10^7\ \text{mm}^4$$

十七、求图示三角形截面对过形心的 z_0 轴（z_0 轴平行于底边）与 z_1 轴的惯性矩。



题 I．3 图



(a)

解：用积分法，如图（a）所示，取微元 dy，则

$$dA = \frac{h-y}{h} b\times dy$$

对 z_1 轴的惯性矩为

$$I_{Z_1} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \bullet \frac{h-y}{h} b\times dy = \frac{bh^3}{12}$$

对 z_1 轴的静矩为

$$S_{Z_1}=\int_A ydA=\int_0^h y\bullet\frac{h-y}{h}b\times dy=\frac{bh^2}{6}$$

形心坐标为

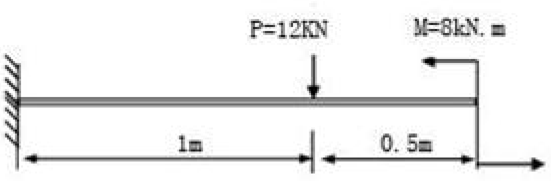
$$Z_C=\frac{S_{Z_1}}{A}=\frac{bh^2/6}{bh/2}=\frac{h}{3}$$

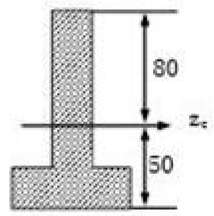
由平行移轴公式 $I_{Z_1}=I_{Z_C}+Z_C^2A$ 得

$$I_{Z_C}=I_{Z_1}-Z_C^2A=\frac{bh^3}{12}-\left(\frac{h}{3}\right)^2\bullet\frac{bh}{2}=\frac{bh^3}{36}$$

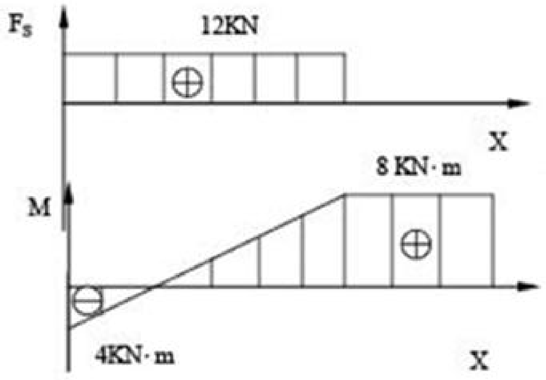
第 6 章　梁的应力

一、已知倒 T 型截面的惯性矩为 IZC=1.0×10-3m4，脆性材料的许用拉应力为$\left[\sigma_t\right]=40MPa$，许用压应力为$\left[\sigma_c\right]=80MPa$，要求：（1）做梁的剪力图和弯矩图；（2）校核梁的弯曲正应力强度；





解：



强度校核

对于 $8KN\cdot m$ 面

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_{\max}y_{t\max}}{I_z}=\frac{8\times50}{10^{-5}}=40MPa<[\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max}=\frac{M_{\max}y_{c\max}}{I_z}=\frac{8\times80}{10^{-5}}=64MPa<[\sigma_c]$$

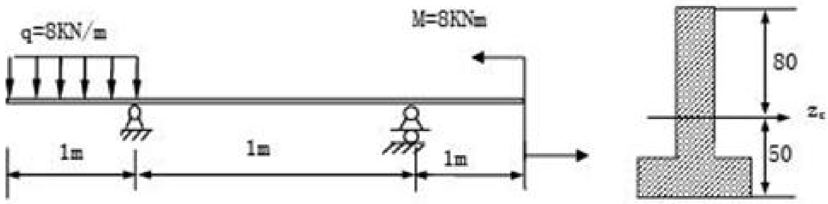
对于 $-4KN\cdot m$ 面

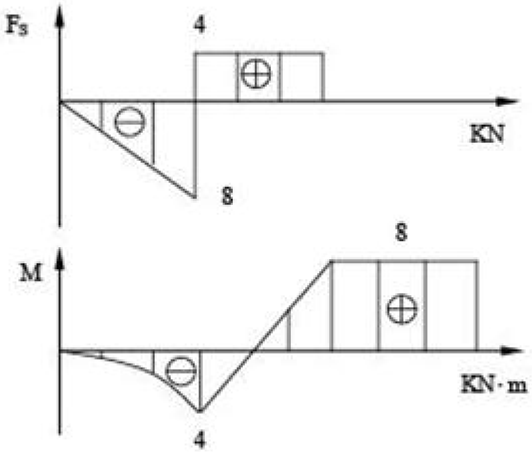
$$\sigma_{t\max}=\frac{|M|_{\max}y_{t\max}}{I_z}=\frac{4\times80}{10^{-5}}=32MPa<[\sigma_t]$$

结论：满足强度条件

二、已知倒 T 型截面对形心轴的惯性矩为 $I_{zc}=1\times10^{-3}m^4$。梁的尺寸及受力如图。已知铸铁材料的许用拉应力$\left[\sigma_t\right]=40MPa$，许用压应力$\left[\sigma_c\right]=80MPa$。要求：（1）作梁的剪力图和弯矩图；（2）校核梁的弯曲

正应力强度。





（二）强度校核

1. 公式：$\sigma_{max}=\dfrac{|M|_{max}y_{max}}{I_z}$

2. 对于 $8KN\cdot m$

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_{max}y_{t\max}}{I_z}=\frac{8\times50}{10^{-5}}=40MPa<[\sigma_t]$$

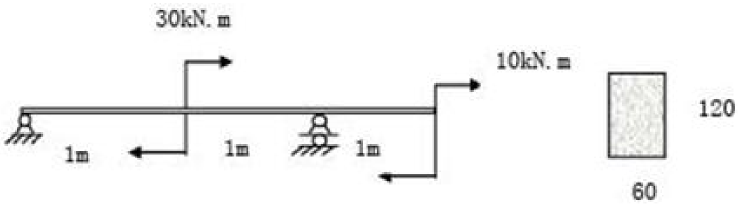
$$\sigma_{c\max}=\frac{M_{max}y_{c\max}}{I_z}=\frac{8\times80}{10^{-5}}=64MPa<[\sigma_c]$$

3. 对于 $-4KN\cdot m$

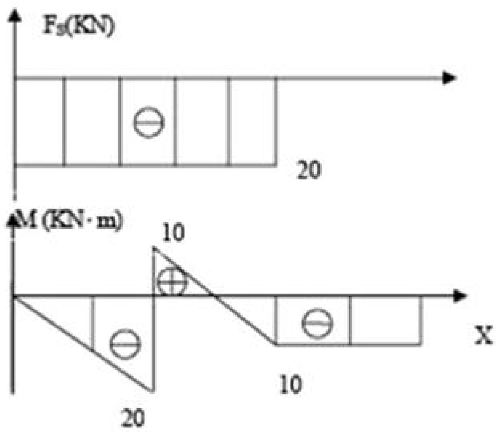
$$\sigma_{t\max}=\frac{|M|_{max}y_{t\max}}{I_z}=\frac{4\times80}{10^{-5}}=32MPa<[\sigma_t]$$

结论：满足强度条件

三、 **100mm×200mm** 的矩形截面梁竖放，受力和几何尺寸如图。要求：（**1**）作梁的内力图；（**2**）计算最大弯曲正应力。



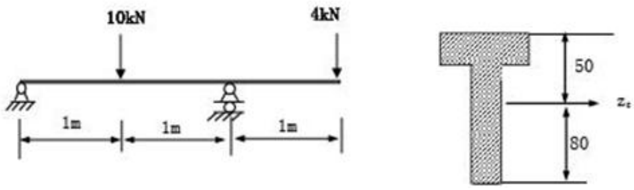
解：



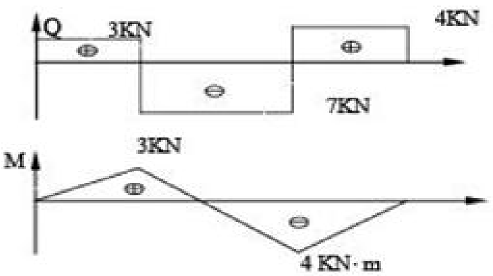
$$\sigma_{max}=\frac{20\times10^{3}}{\frac{1}{6}bh^{2}}=\frac{20\times10^{3}\times6}{0.06\times0.12^{2}}=138.9(MPa)$$

四、T 型截面铸铁梁，尺寸及受力如图。已知铸铁材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=32MPa$，许用压应力 $[\sigma_c]=75MPa$，横截面对形心轴的惯性矩为 $I_{ZC}=9\times10^{-6}m^4$。

要求：（1）作梁的剪力图和弯矩图；（2）校核梁的弯曲正应力强度。



解：



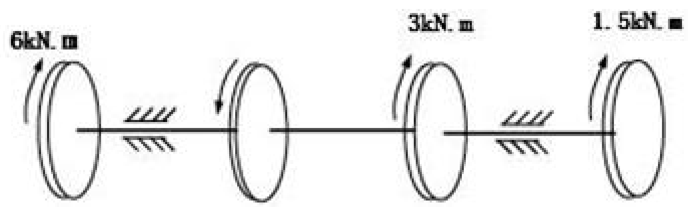
$$\begin{cases}\sigma_{tmax}=\dfrac{4\times10^{3}\times50\times10^{-3}}{9\times10^{-6}}=22.2\text{MPa}<[\sigma_t]\\ \sigma_{cmax}=\dfrac{4\times10^{3}\times80\times10^{-3}}{9\times10^{-6}}=35.56\text{MPa}<[\sigma_c]\end{cases}$$

另一面：

$$\sigma_{max}=\frac{3\times10^{3}\times80\times10^{-3}}{9\times10^{-6}}=26.67\text{MPa}<[\sigma_t]$$

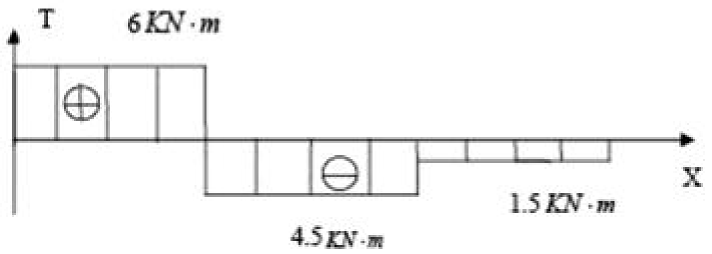
结论：安全

五、某传动轴受力如图所示，已知轴材料的许用剪应。要求：（1）作轴的扭矩图；（2）按剪应力强度条件设计轴的直径；（3）分析这样设计的经济性并从经济性考虑的角度提出其他的设计方案。



解：

1.



2. $\tau_{\max}=\dfrac{|T|_{\max}}{w_t}\le 60\times10^6$

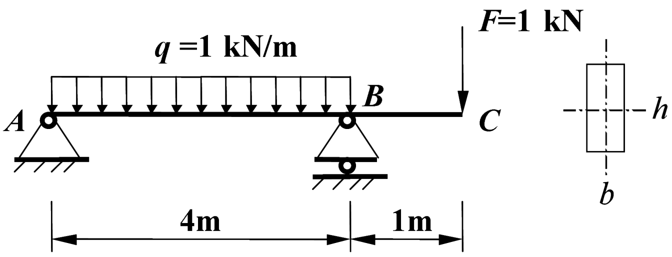
$w_t=\dfrac{\pi D^3}{16}$

∴ $D\ge\sqrt[3]{\dfrac{16\times6\times10^3}{\pi\times60\times10^6}}$=0.0799(m)

3. 按同一轴径设计，仅对最左端满足强度，对中间和右端轴还有富裕，故不经济，从经济角度看，应设计成阶梯轴，即左段最粗，中间段次之，右段最细。

六、横截面为 b×h 的矩形截面梁如图所示，已知：h＝2，b＝5.2cm，F＝1kN，q＝1kN/m，材料的许用应

力为[S]＝140MPa。试校核该梁的正应力强度。



解：画出正确的弯矩图，或写出 B、D 截面的弯矩值。

$$F_A = 1.75kN \qquad F_B = 3.25kN$$

$$x = 1.75m \qquad M_B = -1kN \cdot m$$

$$M_D = 1.53kN \cdot m$$

$$\left|M_{\max}\right| = M_D = 1.53kN \cdot m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\left|M_{\max}\right|}{W_z} = \frac{1.53\times10^3}{\frac{1}{6}\times2.6\times5.2^2\times10^{-6}} = 130.6MPa < [\sigma]$$

该梁符合正应力强度要求。

七、把直径 *d*=1 m 的钢丝绕在直径为 2 m 的卷筒上，设 *E*=200 GPa，试计算钢丝中产生的最大正应力。

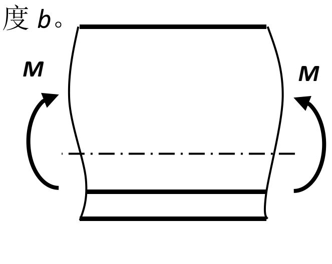
解：(1) 由钢丝的曲率半径知

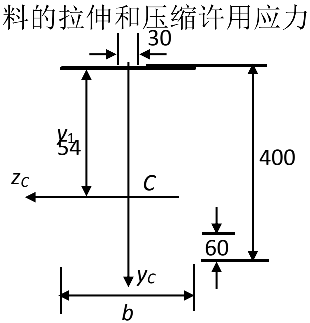
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad \therefore \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I}$$

(2) 钢丝中产生的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{MR}{I} = \frac{ER}{\rho} = \frac{200\times10^9\times0.5\times10^{-3}}{1} = 100\ MPa$$

八、 图示横截面为⊥形的铸铁承受纯弯曲，材料的拉伸和压缩许用应力之比为[σ_t]/[σ_c]=1/4。求水平翼缘的合理宽度 *b*。





解：(1) 梁截面上的最大拉应力和最大压应力

$$\sigma_{t,\max}=\frac{M\left(400-y_1\right)}{I_z}\qquad \sigma_{c,\max}=\frac{My_1}{I_z}$$

$$\frac{\sigma_{t,\max}}{\sigma_{c,\max}}=\frac{400-y_1}{y_1}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\frac{1}{4}$$

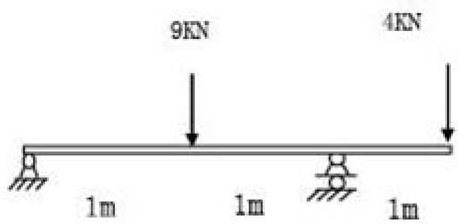
$$y_1=320\ mm$$

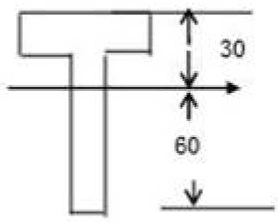
(2) 由截面形心位置

$$y_C=\frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i}=\frac{30\times(400-60)\times170+b\times60\times370}{30\times(400-60)+b\times60}=320$$

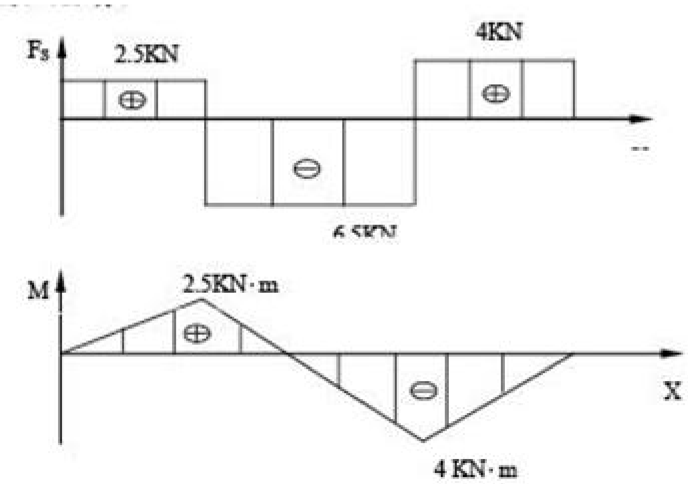
$$b=510\ mm$$

九、T 型截面的惯性矩 $I=8\times10^{-6}m^4$，脆性材料的许用拉应力为 $[\sigma_t]=32MPa$ ，许用压应力为 $[\sigma_c]=75MPa$，要求：（1）做梁的剪力图和弯矩图；（2）校核梁的弯曲正应力强度；（3）分析若将截面倒置是否合理？





解：



对于-4KN·m截面

$$\begin{cases}\sigma_{tmax} = \dfrac{4\times10^3\times40\times10^{-3}}{8\times10^{-6}} = 20\text{MPa} < [\sigma_t] \\ \sigma_{cmax} = \dfrac{4\times10^3\times80\times10^{-3}}{8\times10^{-6}} = 40\text{MPa} < [\sigma_c]\end{cases}$$

对于+2.5KN·m面 $\sigma_{tmax} = \dfrac{2.5\times10^3\times80\times10^{-3}}{8\times10^{-6}} = 25\text{MPa} < [\sigma_t]$

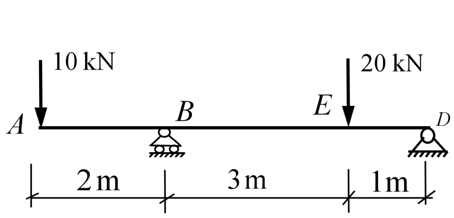
故满足强度条件。

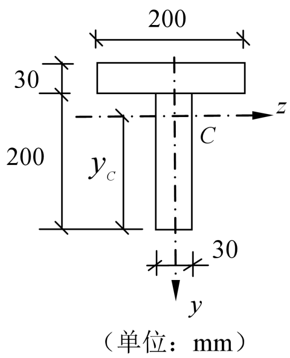
若截面倒置则：

$$\sigma_{tmax} = \frac{4\times10^3\times80\times10^{-3}}{8\times10^{-6}} = 40\text{MPa} > [\sigma_t]$$

结论：不合理

十、铸铁梁的载荷及截面尺寸如图所示。已知许用拉应力$[\sigma_t]$=40 MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=160 MPa。试按正应力条件校核梁的强度。若载荷不变，但将截面倒置，问是否合理？为什么？





（单位：mm）

解：B 截面

$$\sigma_t = \frac{M_B y_{上}}{I_Z} = \frac{20\times10^3\times72.5\times10^{-3}}{6012.5\times10^{-8}} = 24.1MPa < [\sigma_t]$$

$$\sigma_c = \frac{M_B y_{下}}{I_Z} = \frac{20\times10^3\times157.5\times10^{-3}}{6012.5\times10^{-8}} = 52.4MPa < [\sigma_c]$$

E 截面

$$\sigma_t = \frac{M_E y_{下}}{I_Z} = \frac{10\times10^3\times157.5\times10^{-3}}{6012.5\times10^{-8}} = 26.1MPa < [\sigma_t]$$

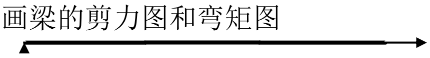
$$\sigma_c = \frac{M_E y_{上}}{I_Z} = \frac{10\times10^3\times72.5\times10^{-3}}{6012.5\times10^{-8}} = 12.1MPa < [\sigma_C]$$

如倒置，则不合理。 $\sigma_t = \frac{M_B y_{下}}{I_Z} = \frac{20\times10^3\times157.5\times10^{-3}}{6012.5\times10^{-8}} = 52.4MPa > [\sigma_t]$

十一、试计算图示工字形截面梁内的最大正应力和最大剪应力。截面几何性质

$\boldsymbol{W} = 141\boldsymbol{cm}^3 \quad \frac{\boldsymbol{I}_z}{\boldsymbol{S}^*_{z\max}} = 13.8\boldsymbol{cm} \quad \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{mm}$

解：(1) 画梁的剪力图和弯矩图



最大剪力和最大弯矩值是

$$\boldsymbol{Q}_{\max} = 15\ \boldsymbol{kN} \qquad \boldsymbol{M}_{\max} = 20\ \boldsymbol{kNm}$$

(2) 计算应力

最大剪应力

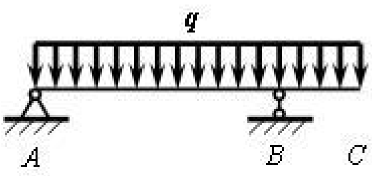
$$\boldsymbol{\tau}_{\max} = \frac{\boldsymbol{Q}_{\max}\boldsymbol{S}^*_{\boldsymbol{Z}\max}}{\boldsymbol{bI_Z}} = \frac{15\times10^3}{0.006\times0.138} = 18.1\boldsymbol{MPa}$$

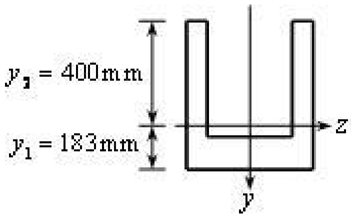
最大正应力

$$\boldsymbol{\sigma}_{\max} = \frac{\boldsymbol{M}_{\max}}{\boldsymbol{W}} = \frac{20\times10^3}{141\times10^{-6}} = 141.8\boldsymbol{MPa}$$

十二、槽形截面梁尺寸及受力图如图所示，AB=3m，BC=1m，z 轴为截面形心轴，I_z=1.73×10^{8}mm^4，q=15kN/m。

材料许用压应力[σ_c]=160MPa，许用拉应力[σ_t]=80MPa。试求：①画梁的剪力图、弯矩图。②按正应力强度条件校核梁的强度。





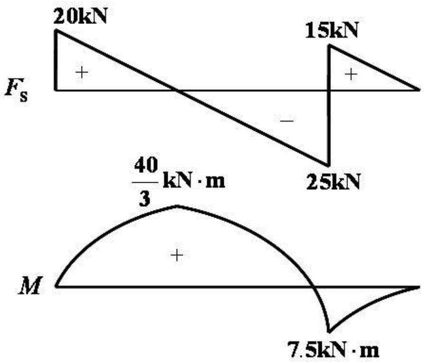
解：①求支座约束力，作剪力图、弯矩图

$$\sum M_{\mathrm{A}}(F)=0: \quad F_{\mathrm{B}y}\times 3-15\times 4\times 2=0$$

$$\sum F_y=0: \quad F_{\mathrm{A}y}+F_{\mathrm{B}y}-15\times 4=0$$

解得：

$$F_{\mathrm{A}y}=20\mathrm{kN} \qquad F_{\mathrm{B}y}=40\mathrm{kN}$$



②梁的强度校核

拉应力强度校核

D 截面

$$\sigma_{\mathrm{tmax}}=\frac{M_{\mathrm{D}}y_1}{I_z}=\frac{40/3\times 10^3\times 183\times 10^{-3}}{1.73\times 10^8\times 10^{-12}}=14.1\mathrm{MPa}\le[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

B 截面

$$\sigma_{\mathrm{tmax}}=\frac{M_{\mathrm{B}}y_2}{I_z}=\frac{7.5\times 10^3\times 400\times 10^{-3}}{1.73\times 10^8\times 10^{-12}}=17.3\mathrm{MPa}\le[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

压应力强度校核（经分析最大压应力在 *D* 截面）

$$\sigma_{\mathrm{tmax}}=\frac{M_{\mathrm{D}}y_2}{I_z}=\frac{40/3\times 10^3\times 400\times 10^{-3}}{1.73\times 10^8\times 10^{-12}}=30.8\mathrm{MPa}\le[\sigma_{\mathrm{c}}]$$

所以梁的强度满足要求

十三、矩形截面悬臂梁如图所示，已知 *l*=4 m， *b / h* =2/3，*q*=10 kN/m，[*σ*]=10 MPa，试确定此梁横截面的尺寸。

解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知：

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{2}$$

(2) 计算抗弯截面系数

$$W=\frac{bh^2}{6}=\frac{\frac{2}{3}h^3}{6}=\frac{h^3}{9}$$

(3) 强度计算

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{h^3}{9}}=\frac{9ql^2}{2}\cdot\frac{1}{h^3}\le[\sigma]$$

$$\therefore h\ge\sqrt[3]{\frac{9ql^2}{2[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{9\times10\times10^3\times4^2}{2\times10\times10^6}}=416mm$$

$$b\ge277mm$$

十四、在图中，梁的总长度为 *l*，受均布载荷 *q* 作用。若支座可对称地向中点移动，试问移动距离为若干时，最为合理？

解：(1) 约束反力

$$R_B=R_C=\frac{ql}{2}$$

(2) 截面上的最大正弯矩和最大负弯矩

$$M_{+,\max}=\frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2}-a\right)-\frac{ql^2}{8}=\frac{ql^2}{8}-\frac{qla}{2}$$

$$M_{-,\max}=-\frac{qa^2}{2}$$

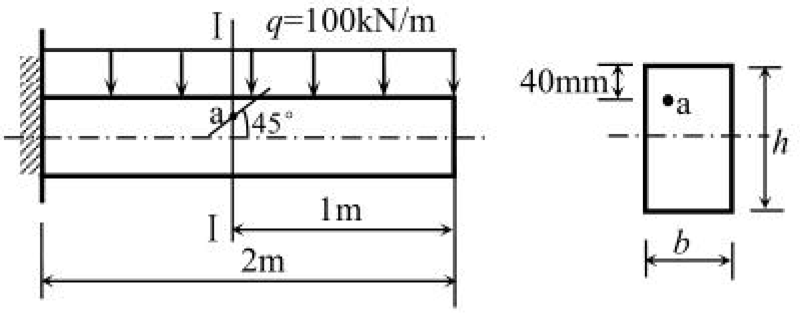
(3) 二者数值相等时最为合理

$$\frac{ql^2}{8}-\frac{qla}{2}=\frac{qa^2}{2}$$

$$4a^2+4la-l^2=0$$

$$a=\frac{-4l+\sqrt{16l^2+16l^2}}{8}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}l=0.207l$$

十五、矩形截面悬臂梁受力如图所示，已知截面宽度 b=100mm，高度 h=200mm。梁材料的弹性模量 E=200GPa，泊松比ν=0.3，许用应力[σ]=160MPa。试求：1. Ⅰ-Ⅰ截面上 a 点的正应力和切应；2. Ⅰ-Ⅰ截面上 a 点沿图示 45°方向的线应变。



解： 1、Ⅰ-Ⅰ截面上 a 点的正应力和切应

$$\sigma_a=\frac{My}{I_z}=\frac{50\times10^3\times0.06\times12}{0.1\times0.2^3}=45MPa$$

$$\tau_a=\frac{F_sS_z^*}{I_zb}=\frac{100\times10^3\times0.04\times0.1\times0.08\times12}{0.1\times0.2^3\times0.1}=4.8MPa$$

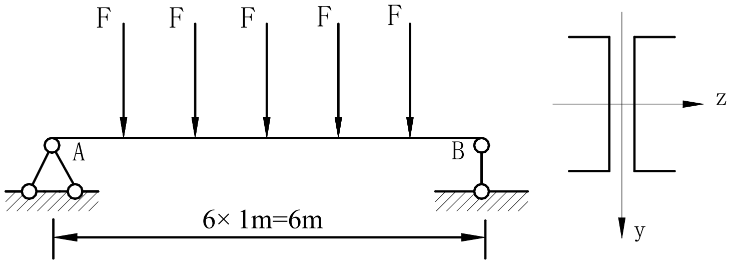
2. Ⅰ-Ⅰ截面上 a 点沿图示 45°方向的线应变

$$\sigma_{45^0}=\frac{\sigma_a}{2}+\frac{\sigma_a}{2}\cos90^0-\tau_\alpha\sin90^0=22.5-4.8=17.7MPa$$

$$\sigma_{-45^0}=\frac{\sigma_a}{2}+\frac{\sigma_a}{2}\cos(-90^0)-\tau_\alpha\sin(-90^0)=22.5+4.8=27.3MPa$$

$$\varepsilon_{45^0}=\frac{1}{E}(\sigma_{45^0}-\nu\sigma_{-45^0})=47.55\mu\varepsilon$$

十六、由两根 36a 号槽钢组成的梁如图四所示。已知 36a 号槽钢的弯曲截面系数为 659.7cm^3，钢的许用弯曲正应力为$[\sigma]=180\mathrm{MPa}$，试按正应力强度条件计算梁的许可荷载[F]。



解：由对称性可得支反力：$F_A=F_B=2.5F$

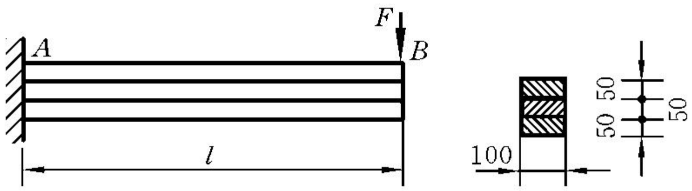
危险截面在梁中点处，$M_{max}=2.5F\times3-F\times2-F\times1=4.5F$

梁由两根槽钢组成，故 $W_z=2\times659.7=1319.4cm^3$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{4.5F}{1319.4\times10^{-6}}\leq[\sigma]=180\times10^6$$

[F]=52776N=52.776kN

十七、图示悬臂梁由三块 50mm×100mm 的木板胶合而成，在其自由端作用有横力 F。若已知木材的[σ] =10MPa、 [τ] = 1MPa，胶合缝上的[τ_1] = 0.35MPa ，梁长 l =1m，试求许可载荷[F]。



解：危险截面为固定端处：

$$M_{max} = Fl \qquad F_{smax} = F$$

由正应力强度条件：

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Fl}{W_z} \pounds\ [s]$$

$$F \pounds\ \frac{[s]\text{Ж}W_z}{l} = \frac{10\text{创}10^6 \quad 0.1 \quad 0.15^2}{6}N = \ 3.75kN$$

由切应力强度条件： $t_{max} = \frac{3}{2}\times\frac{F_{smax}}{A} = \frac{3F}{2A} \pounds\ [t]$

$$F \pounds\ \frac{2[t]\text{狄}A}{3} = \frac{2 \quad 10^6\text{创}0.15 \quad 0.1}{3}N = \ 10kN$$

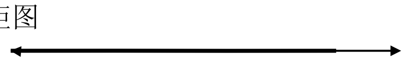
由胶合缝上切应力强度条件： $t_1 = \frac{F_{smax}S_z^*}{I_z b} = \frac{FS_z^*}{I_z b} \pounds\ [t_1]$

$$F \le \frac{[\tau_1] \cdot I_z b}{S_z^*} = \frac{0.35 \times 10^6 \times 0.1 \times 0.15^3 \times 0.1}{12 \times 0.05 \times 0.1 \times 0.05} N = 3.94kN$$

$$[F] = \min(3.75, 10, 3.94) = 3.75kN$$

十八、20a 工字钢梁的支承和受力情况如图所示，若[σ]=160 MPa，试求许可载荷。抗弯截面系数：$W = 237 \times 10^{-6} m^3$。

解：(1) 画梁的弯矩图



由弯矩图知：

$$M_{\max} = \frac{2P}{3}$$

(2) 查表得抗弯截面系数

$$W = 237 \times 10^{-6} m^3$$

(3) 强度计算

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\frac{2P}{3}}{W} = \frac{2}{3W} \cdot P \le [\sigma]$$

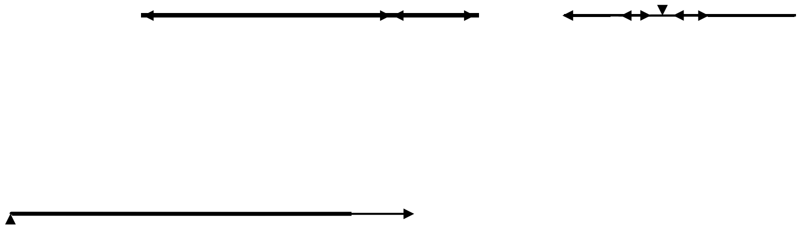
$$\therefore P \le \frac{3W[\sigma]}{2} = \frac{3 \times 237 \times 10^{-6} \times 160 \times 10^6}{2} = 56.88kN$$

取许可载荷

$$[P] = 57kN$$

十九、⊥形截面铸铁梁如图所示。若铸铁的许用拉应力为[σ_t]=40 MPa，许用压应力为[σ_c]=160 MPa，截面对形心 z_c 的惯性矩 I_{zc}=10180 cm^4，h_1=96.4 mm，试求梁的许用载荷 P。

解：(1) 画梁的弯矩图



由弯矩图知：可能危险截面是 A 和 C 截面

(2) 强度计算

A 截面的最大压应力

$$\sigma_{C\max}=\frac{M_A h_2}{I_{zC}}=\frac{0.8Ph_2}{I_{zC}}\le[\sigma_C]$$

$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_C]}{0.8h_2}=\frac{10180\times10^{-8}\times160\times10^{6}}{0.8\left(250-96.4\right)\times10^{-3}}=132.6kN$$

A 截面的最大拉应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_A h_1}{I_{zC}}=\frac{0.8Ph_1}{I_{zC}}\le[\sigma_t]$$

$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_t]}{0.8h_1}=\frac{10180\times10^{-8}\times40\times10^{6}}{0.8\times96.4\times10^{-3}}=52.8kN$$

C 截面的最大拉应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_C h_2}{I_{zC}}=\frac{0.6Ph_2}{I_{zC}}\le[\sigma_t]$$

$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_t]}{0.6h_2}=\frac{10180\times10^{-8}\times40\times10^{6}}{0.6\left(250-96.4\right)\times10^{-3}}=44.2kN$$

取许用载荷值

$$[P]=44.2kN$$

二十、圆轴的外伸部分系空心轴。试作轴弯矩图，并求轴内最大正应力。

解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知：可能危险截面是 C 和 B 截面

(2) 计算危险截面上的最大正应力值

C 截面：

$$\sigma_{C\max} = \frac{M_C}{W_C} = \frac{M_C}{\dfrac{\pi d_C^3}{32}} = \frac{32 \times 1.34 \times 10^3}{\pi \times 0.06^3} = 63.2 MPa$$

B 截面：

$$\sigma_{B\max} = \frac{M_B}{W_B} = \frac{M_B}{\dfrac{\pi D_B^3}{32}(1 - \dfrac{d_B^4}{D_B^4})} = \frac{0.9 \times 10^3}{\dfrac{\pi \times 0.06^3}{32}(1 - \dfrac{0.045^4}{0.06^4})} = 62.1 MPa$$

(3) 轴内的最大正应力值

$$\sigma_{\max} = \sigma_{C\max} = 63.2 MPa$$

二十一. 由三根木条胶合而成的悬臂梁截面尺寸如图所示，跨度 *l*=1 m。若胶合面上的许用切应力为 0.34 MPa，木材的许用弯曲正应力为[σ]=10 MPa，许用切应力为[τ]=1 MPa，试求许可载荷 *P*。

解：(1) 截面上的最大剪力和弯矩

$$Q_{\max} = P \qquad M_{\max} = Pl$$

(2) 梁弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl}{\dfrac{1}{6}bh^2} \le [\sigma]$$

$$P \le \frac{[\sigma]bh^2}{6l} = \frac{10 \times 10^6 \times 0.1 \times 0.15^2}{6 \times 1} = 3.75\ kN$$

(3) 梁弯曲切应力强度条件

$$\boldsymbol{\tau}_{\max}=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{Q}_{\max}}{\boldsymbol{A}}=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{bh}}\leq[\boldsymbol{\tau}]$$

$$\boldsymbol{P}\leq\frac{2[\boldsymbol{\tau}]\boldsymbol{bh}}{3}=\frac{2\times1\times10^{6}\times0.1\times0.15}{3}=10\,\boldsymbol{kN}$$

(4)胶合面上切应力强度条件

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{Q}_{\max}}{2\boldsymbol{I}_z}\left(\frac{\boldsymbol{h}^2}{4}-\boldsymbol{y}^2\right)=\frac{\boldsymbol{P}}{2\times\frac{\boldsymbol{bh}^3}{12}}\left(\frac{\boldsymbol{h}^2}{4}-\boldsymbol{y}^2\right)\leq[\boldsymbol{\tau}_1]$$

$$\boldsymbol{P}\leq\frac{[\tau_1]\boldsymbol{bh}^3}{6\left(\frac{\boldsymbol{h}^2}{4}-\boldsymbol{y}^2\right)}=\frac{0.34\times10^{6}\times0.1\times0.15^{3}}{6\left(\frac{0.15^2}{4}-0.025^2\right)}=3.825\,\boldsymbol{kN}$$

许可载荷：[*P*]=3.75 kN。

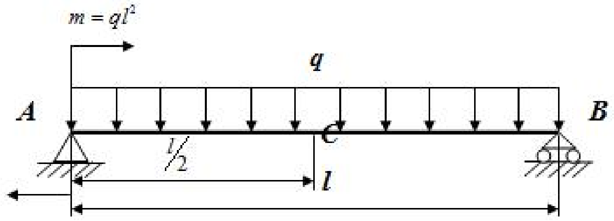
第 7 章　梁的变形

一、如图所示桥式起重机的最大载荷为 P=20KN,起重机大梁为 32a 工字钢，E=210Gpa，L=8.76cm。规定[f]=L/500。校核大梁的刚度。(I=11100(cm^4)　$f_{\max}=\frac{pl^3}{48EI}$)

$$f_{\max}=\frac{pl^3}{48EI}=\frac{20*10^3*0.0876^2 l}{48*210*10^9*11100*10^{-8}}=\frac{l}{730}\le\left[f\right]=\frac{l}{500}$$

可见符合刚度要求

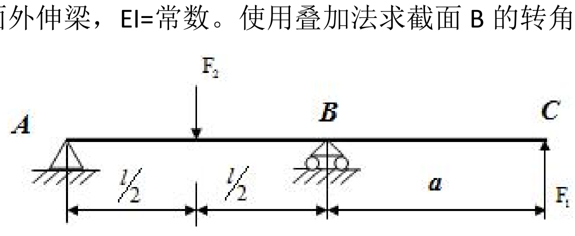
二、简支梁上作用均布载荷 q 以及集中力偶 ，试用叠加法求梁跨中截面的挠度及两端截面 A、B 的转角。



解：$\mathrm{v_C}=(\mathrm{v_C})_q+(\mathrm{v_C})_m=\frac{5\mathrm{ql}^2}{384\mathrm{EI}}+\frac{5\mathrm{ql}^2}{384\mathrm{EI}}=\frac{29ql^4}{384\mathrm{EI}}$

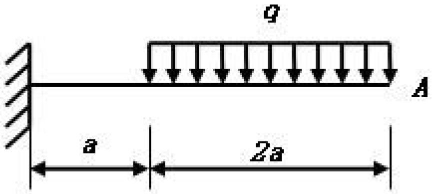
$\theta_{\mathrm{A}}=(\theta_{\mathrm{A}})_{\mathrm{q}}+(\theta_{\mathrm{A}})_m=\frac{\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}+\frac{\mathrm{ql}^3}{3\mathrm{EI}}=\frac{9\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}$　$\theta_{\mathrm{B}}=(\theta_{\mathrm{B}})_q+(\theta_{\mathrm{B}})_m=\frac{\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}-\frac{ml}{6\mathrm{EI}}=-\frac{5\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}$

三、如图所示截面外伸梁，EI=常数。使用叠加法求截面 B 的转角和端点 C 的挠度。

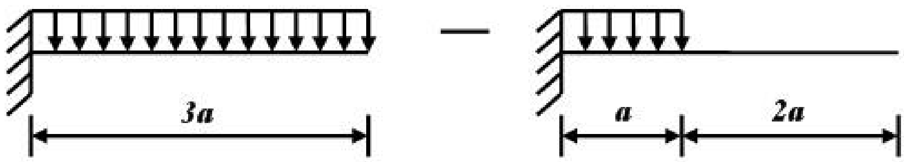


解：$\theta_{\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{F_1al}}{3\mathrm{EI}}-\frac{\mathrm{F_2l^2}}{16\mathrm{EI}}$　　$v_C=v_{C_1}+v_{C_2}=-\frac{\mathrm{F_1a^2}}{3\mathrm{EI}}(a+l)-\frac{\mathrm{F_2al^2}}{16\mathrm{EI}}$

四、用叠加法求如图所示梁截面A的挠度和转角。EI为已知常数。



解：可分解为如下两图相减后的效果



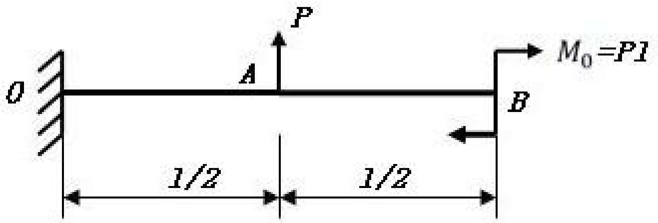
(1) (2)

查表得 $\theta_1=-\dfrac{q(3a)^3}{6EI}=-\dfrac{9qa^3}{2EI}$ 显然$\theta_2=-\frac{qa^3}{6EI}$

$$y_1=-\frac{q(3a)^4}{8EI}=-\frac{81qa^4}{8EI} \qquad y_2=-\frac{qa^4}{8EI}+\theta_2 a=-\frac{11qa^4}{24EI}$$

则 $\theta=\theta_1-\theta_2=-\dfrac{13qa^3}{3EI}$ $\qquad y=y_1-y_2=-\dfrac{24qa^4}{3EI}$

五、 用积分法求图所示梁 A 截面的挠度和 B 截面的转角。



解 ① 对于 OA 段： 弯矩方程为 $M(x)=-\frac{1}{2}Pl-Px$

即 $EIy''=-\frac{1}{2}Pl-Px$

$EIy'=-\frac{1}{2}Plx-\frac{1}{2}Px^2+C_1$

$EIy=-\frac{1}{4}Plx^2-\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2$

边界条件 $x=0 \quad y'=0$

$x=0 \quad y=0$

由此边界条件可解得 $C_1=C_2=0$

将 $C_1=C_2=0$ 及 $x=\frac{1}{2}l$ 分别代入挠度及转角方程得

A 截面转角为 $\theta_A=-\frac{3Pl^2}{8EI}$ 挠度为 $y_A=-\frac{Pl^3}{12EI}$

② 对于 AB 段 弯矩 $M=EIy''=Pl$

则 $EIy'=EI\theta=Plx+C_3$（设 $x=0$ 处为 A 截面）

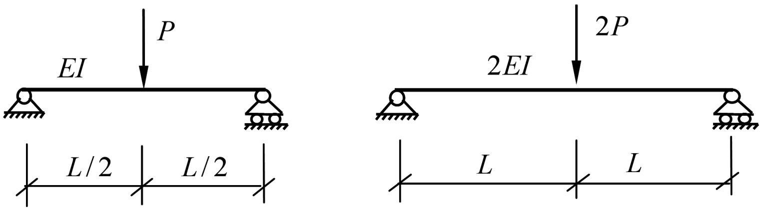
边界条件 $x=0$ $\theta=\theta_A=-\frac{3Pl^2}{8EI}$ 得 $C_3=-\frac{3}{8}Pl^2$

将 $C_3=-\frac{3}{8}Pl^2$ 及 $x=\frac{1}{2}l$ 代入转角方程即得

B 截面转角为 $\theta_B=\frac{Pl^2}{8EI}$

综上所述：A 截面挠度为 $y_A=-\frac{Pl^3}{12EI}$ B 截面转角为 $\theta_B=\frac{Pl^2}{8EI}$

六、如图所示为两根材料相同的简支梁，求两梁中点的挠度之比 w_a/w_b。

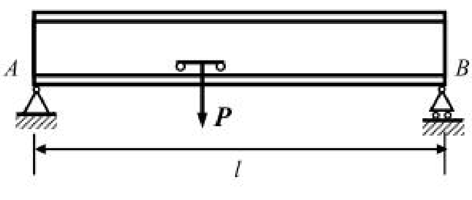


(a) (b)

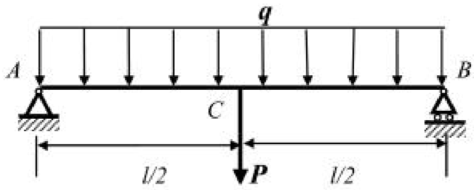
解：

$$\frac{wa}{wb}=\frac{kPL^3}{EI}/\frac{k2P(2L)^3}{2EI}=\frac{1}{8}$$

七、. 桥式起重机的最大载荷为 P=20 kN。起重机大梁为 32a 工字钢，E=210 GPa，$l=8.7m$。规定[f]=l/500，试校核大梁刚度。



解：(1) 当起重机位于梁中央时，梁变形最大；计算简图为



(2) 梁的最大挠度发生在 C 截面

$$\left|f_{\max}\right|=\left|f_C\right|=\left|f_{C(P)}\right|+\left|f_{C(q)}\right|=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{5ql^4}{384EI}$$

(3) 查表得（32a 工字钢）

$$I=11100cm^4 \qquad q=52.717kg/m=516.6N/m$$

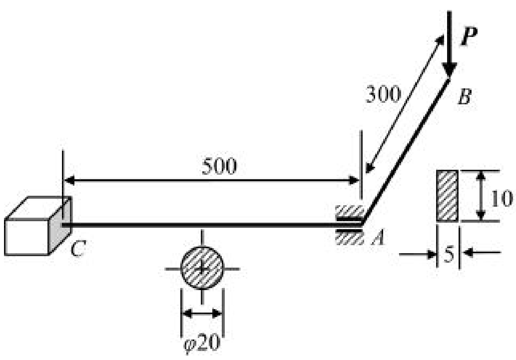
(4) 刚度计算

$$\left|f_{\max}\right|=\frac{20\times10^3\times8.76^3}{48\left(210\times10^9\right)\left(11100\times10^{-8}\right)}+\frac{5\times516.6\times8.76^4}{384\left(210\times10^9\right)\left(11100\times10^{-8}\right)}$$

$$=0.0120+0.00170=0.0137m\prec[f]=\frac{l}{500}=0.0175m$$

梁的刚度足够。
注：这里考虑工字梁的自重影响。

八、直角析轴杆与 ABC 如图所示。A 处为一轴承，允许 AC 轴的端截面在轴承内自由转动，但不能上下移动。已知 P=60 N，E=210 GPa，G=0.4 E。试求截面 B 的垂直位移。



解：(1) 分析变形：AB 发生弯曲变形，AC 发生扭转变形；
(2) 计算 A 、 C 相对扭转角

$$\varphi_{AC}=\frac{T\cdot\overline{AC}}{GI_p}=\frac{P\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{GI_p}$$

由此引起 B 截面的垂直位移(向下)

$$\delta_{B(1)}=\varphi_{AC}\cdot\overline{AB}=\frac{P\cdot\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}}{G\cdot\dfrac{\pi d^4}{32}}=\frac{32\times60\times0.3^2\times0.5}{0.4\times210\times10^9\times\pi\times0.02^4}=2.05mm$$

(3) 计算 AB 变形引起 B 截面的位移(向下)

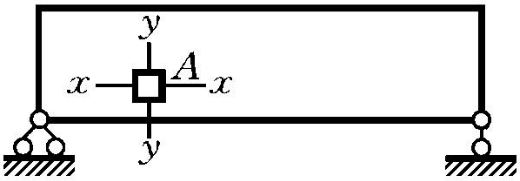
$$\delta_{B(2)}=\frac{P\overline{AB}^{3}}{3EI}=\frac{60\times0.3^{3}}{3\times210\times10^{9}\times\dfrac{0.005\times0.01^{3}}{12}}=6.17mm$$

(4) 计算 B 截面的总体位移(向下)

$$\delta_{B}=\delta_{B(1)}+\delta_{B(2)}=8.22mm$$

第 8 章　应力状态分析和强度理论

一、钢桥横梁的 A 点用应变仪测得 $\varepsilon_x=0.4\times10^{-3}$， $\varepsilon_y=-0.12\times10^{-3}$，已知：E=200GPa， $\mu=0.3$。试求 A 点的 x-x 及 y-y 方向的正应力 。



解：A 点为平面应力状态，由广义胡克定律

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)$$

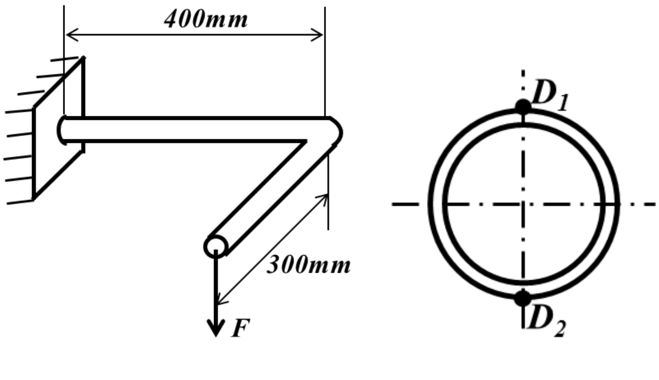
$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)$$

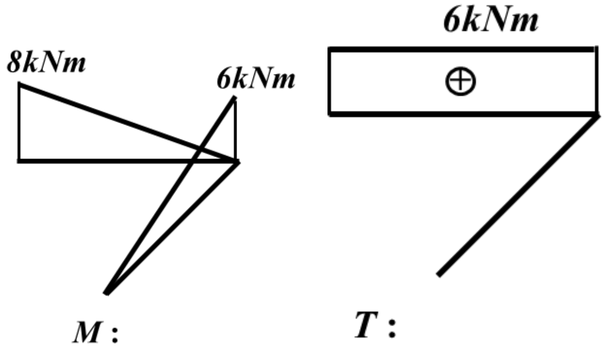
$$=\frac{200\times10^9}{1-0.3^2}\times(0.4+0.3\times(-0.12))\times10^{-3}=80MPa$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)$$

$$=\frac{200\times10^9}{1-0.3^2}\times(-0.12+0.3\times0.4)\times10^{-3}=0$$

二、图示折杆由无缝钢管制成，钢管外径 D=140mm，壁厚 t=10mm，F=20kN。（1）指出钢管中的危险点；（2）计算危险点第三和第四强度理论下的相当应力。





解:作内力图：

(1) 危险截面为固定端截面，相应杆件为弯扭组合变形，危险点为该截面边缘上下两点

(2) 两危险点的相当应力相等

$M = 8kNm \qquad T = 6kNm$

$$W = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) = \frac{\pi \times 140^3}{32}[1-(\frac{120}{140})^4]$$

$$= 0.124 \times 10^6 mm^3 = 0.124 \times 10^{-3} m^3$$

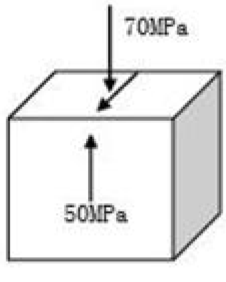
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}$$

$$= \frac{10 \times 10^3}{0.124 \times 10^{-3}} = 80.65MPa$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W}$$

$$= \frac{\sqrt{8^2 + 0.75 \times 6^2} \times 10^3}{0.124 \times 10^{-3}} = 76.93MPa$$

三、已知某受力构件的单元体的应力状态如图所示，该构件材料的弹性模量 E=210GPa,泊松比 $\mu = 0.25$，要求：（1）该单元体的三个主应力；（2）求该单元体的最大切应力（3）求该单元体的最大线应变。



1. 公式

$$\begin{cases}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{cases} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+(\tau_{xy})^2}$$

$$= -35 \pm \sqrt{35^2+50^2}$$

$$= -35 \pm 61.03$$

$\sigma_1 = 26.02MPa$ $\quad\quad$ $\sigma_2 = 0MPa$ $\quad\quad$ $\sigma_3 = -96.02MPa$

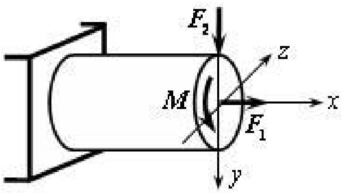
2.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = 61.03MPa$$

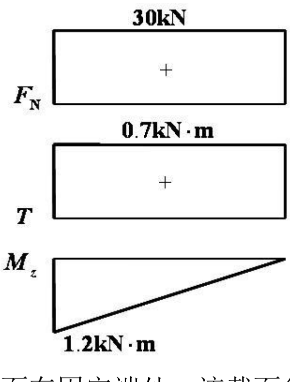
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

$$= 2.38\times10^{-4}$$

四、图所示圆截面杆件 d=80mm，长度 l=1000mm，承受轴向力 F1=30kN，横向力 F2=1.2kN，外力偶 M=700N·m 的作用，材料的许用应力[σ]=40MPa，试求：①作杆件内力图。②按第三强度理论校核杆的强度。



解：①



②由内力图可判断危险截面在固定端处，该截面危险点在横截面上的正应力、切应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A}+\frac{M_z}{W_z} = \frac{4\times30\times10^3}{\pi\times0.08^2}+\frac{32\times1.2\times10^3}{\pi\times0.08^3} = 29.84\text{MPa}$$

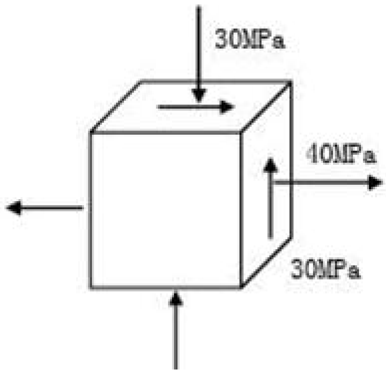
$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{16\times700}{\pi\times0.08^3} = 6.96\text{MPa}$$

$$\therefore\ \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = \sqrt{29.84^2+4\times6.96^2} = 32.9\text{MPa} \le [\sigma]$$

所以杆的强度满足要求

五、 已知某受力构件的危险点的单元体的应力状态如图所示，该构件材料的弹性模量 E=210GPa，泊松比 $[\sigma]=60MPa$ 要求：（1）该单元体的三个主应力；（3）该单元体的最大切应力；（3）该单元体的最大

主应变。



解：

$$\begin{cases}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{cases} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\left(\tau_{xy}\right)^2}$$

$$= 5 \pm 46.10$$

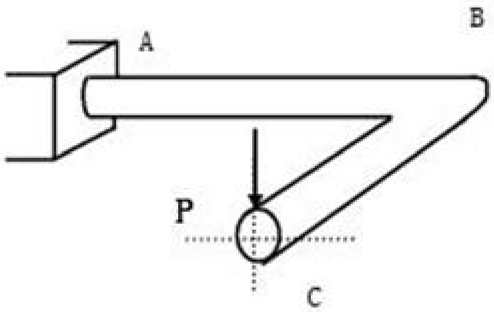
$\sigma_1 = 51.1MPa$　　　　　$\sigma_2 = 0MPa$　　　　　$\sigma_3 = -41.1MPa$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = 46.10MPa$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

$$= 2.9\times10^{-4}$$

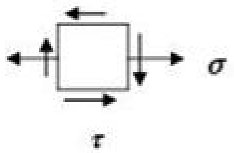
六、某钢直角拐的直径为 D=20mm，AB=L=0.4mm,BC=a=0.3m，荷载 P=314.159N，钢材料的弹性模量 E=200GPa，泊松比为 0.25，许用应力为$[\sigma] = 60MPa$，要求：（1）确定危险点，用单元体表示危险点的应力状态；（2）计算危险点的最大伸长线应变；（3）用第三强度理论校核拐的强度。



解：

1. 危险点为固定端处 上、下表面点

上表面点：



2.

$$\sigma=\frac{10\pi\times0.4\times32}{\pi\times0.02^3}=16(MPa) \qquad \tau=\frac{pa}{\frac{\pi D^3}{16}}=6(MPa)$$

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}=18(MPa)$$

$$\sigma_2=0$$

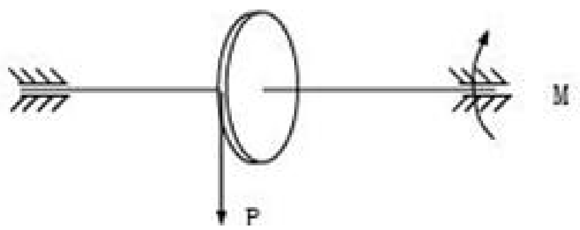
$$\sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}=-2(MPa)$$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$
$$=9.25\times10^{-5}$$

3. $\sigma_{r_3}=\sigma_1-\sigma_3=20(MPa)$ 不超过许用应力

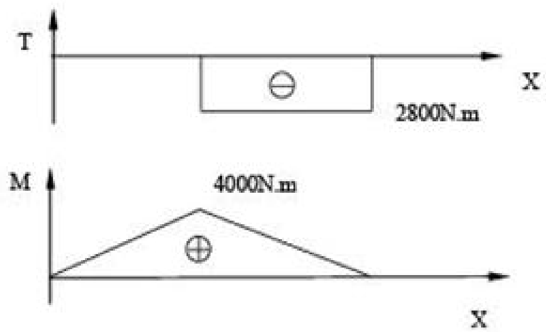
所以满足强度

七、传动轴的直径 d 为 80 毫米，轴长为 2 米，轴材料的许用应力为$[\sigma]=100MPa$。轮安装在轴的中间截面，轮的直径 D 为 700 毫米，轮缘挂一重 P=8KN 的物体与转矩 M 平衡。要求：（1）做轴的内力图；（2）确定危险点的位置，并用单元体表示危险点的应力状态；（3）用第三强度理论校核轴的强度。

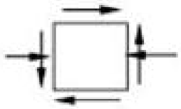


解：

1.



2. 危险点　中间面上　上下边缘点



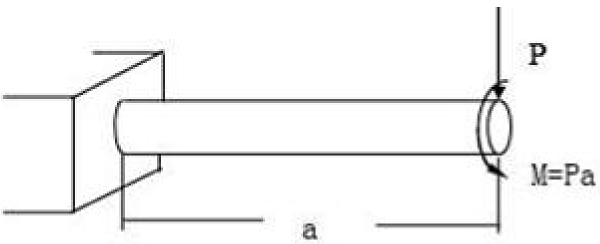
3. $\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}=97.18\text{MPa}<[\sigma]$

安全

八、若塑性材料的实心杆件受力如图，外荷载 P，力偶 M,长度 a,材料的许用应力$[\sigma]$。

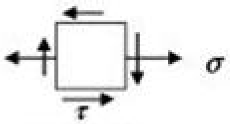
（1）确定危险点的位置，并用单元体表示危险点的应力状态；

（2）用第三强度理论确定实心杆件的直径 D。

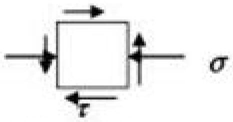


解：

1. 危险点为固定端处 上、下表面点



（上表面点）



（下表面点）

2. 危险面上的内力

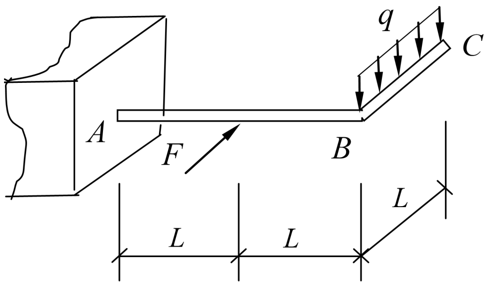
$$T = pa$$
$$M = pa$$

3 强度条件： $\sigma_{r_3} = \frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W} \le [\sigma]$

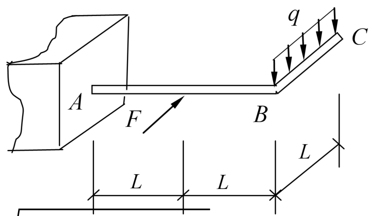
$$\frac{32\sqrt{(pa)^2+(pa)^2}}{\pi D^3} \le [\sigma]$$

$$\therefore D \ge \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(pa)^2+(pa)^2}}{\pi[\sigma]}}$$

九、圆截面直角弯杆 ABC 放置于图示的水平位置，已知 L=50cm，水平力 F=40KN，铅垂均布载荷 q=28KN/m，材料的许用应力$[\sigma]=160MPa$ ，试用第三强度理论设计杆的直径 d。



解：



$$W = \frac{\pi d^3}{32} \ge \frac{\sqrt{T^2+M_y^2+M_z^2}}{[\sigma]}$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_z^2+M_y^2+T^2}}{\pi[\sigma]}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{3.5^2+20^2+14^2}\times 10^3}{3.14\times 160\times 10^6}}$$

$$= 11.6\ cm$$

十、空心钢轴的外径 $D=100mm$ ，内径 $d=50mm$ 。已知间距为 $l=2.7m$ 的两横截面的相对扭转角 $\phi=1.8^o$ ，材料的切变模量 $G=80GPa$ 。试求：

（1）轴内的最大切应力；

（2）当轴以 $n=80r/\min$ 的速度旋转时，轴所传递的功率。

解：（1）计算轴内的最大切应力

$$I_p=\frac{1}{32}\pi D^4(1-\alpha^4)=\frac{1}{32}\times3.14159\times100^4\times(1-0.5^4)=9203877(mm^4)\text{。}$$

$$W_p=\frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)=\frac{1}{16}\times3.14159\times100^3\times(1-0.5^4)=184078(mm^3)$$

式中，$\alpha=d/D$。

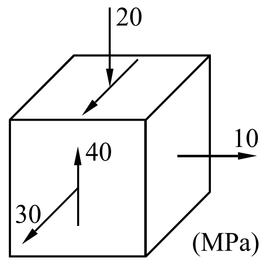
$$\varphi=\frac{T\cdot l}{GI_p},$$

$$T=\frac{\varphi GI_p}{l}=\frac{1.8\times3.14159/180\times80000N/mm^2\times9203877mm^4}{2700mm}$$

$$=8563014.45N\cdot mm$$

$$=8.563(kN\cdot m)$$

十一、某点的应力状态如图示，求该点的主应力及最大切应力。



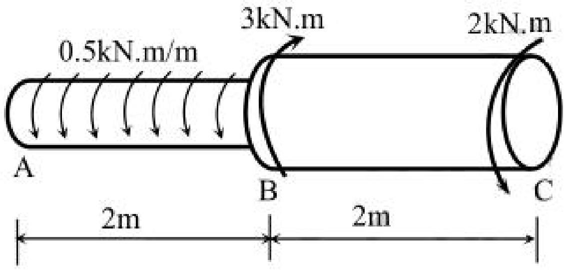
解：$$\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}$$

$$=\frac{30-20}{2}\pm\sqrt{25^2+40^2}=5\pm47.16=\begin{matrix}52.16\\-42.16\end{matrix}\text{MPa}$$

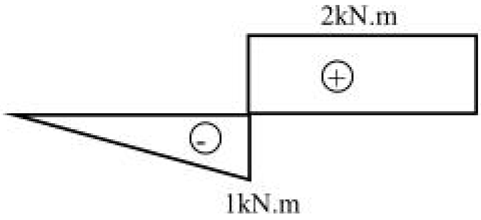
所以$\sigma_1=52.2$MPa，$\sigma_2=10$MPa，$\sigma_3=-42.16$MPa

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=47.2\text{MPa}$$

十二、阶梯轴受力如图所示，已知 AB 段直径 d_1=40mm，BC 段直径 d_2=80mm，材料的切变模量 G=80GPa。试求：1.画出圆轴的扭矩图；2.轴上的最大切应力；3. 截面 C 相对于截面 A 的扭转角。



解：1、扭矩图



2、轴上的最大切应力：79.58MPa

$$\tau_1=\frac{T_1}{W_{P1}}=\frac{16T_1}{\pi d_1^3}=\frac{16\times1\times10^3}{\pi\times0.04^3}=79.58\text{MPa}$$

$$\tau_2=\frac{T_2}{W_{P2}}=\frac{16T_2}{\pi d_2^3}=\frac{16\times2\times10^3}{\pi\times0.08^3}=19.89\text{MPa}$$

3、截面 C 相对于截面 A 的扭转角

$$I_{P1}=\frac{\pi d_1^4}{32}=\frac{\pi\times0.04^4}{32}=2.513\times10^{-7}\text{m}^4$$

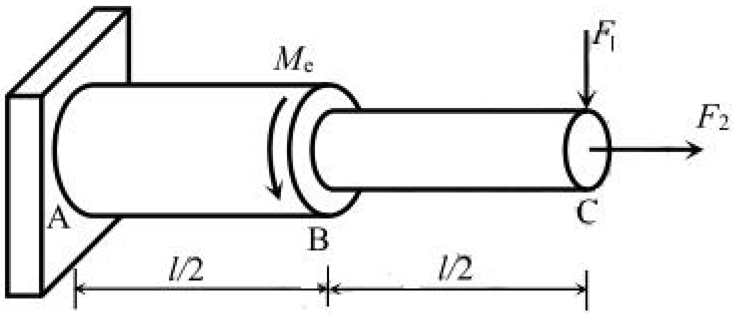
$$I_{P2}=\frac{\pi d_2^4}{32}=\frac{\pi\times0.08^4}{32}=4.021\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$\varphi_{AB}=-\int_0^2\frac{T_1(x)}{GI_{P1}}dx=-\int_0^2\frac{0.5x\times10^3}{80\times10^9\times2.513\times10^{-7}}dx=-0.0497rad$$

$$\varphi_{BC}=\frac{T_2l_2}{GI_{P2}}=\frac{2\times2\times10^3}{80\times10^9\times4.02\times10^{-6}}=0.0124rad$$

$$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}=-0.0373rad$$

十三、阶梯轴如图所示，长度 l=1m，BC 段的直径 d_1=40mm，AB 段的直径 d_2=60mm，C 端作用铅垂力 F_1=1kN 和轴向力 F_2=10kN，B 处作用外力偶 M_e=2kN·m，轴材料的许用应力[σ]=170MPa。试按第三强度理论校核轴的强度。



解：1、校核 BC 段的强度，BC 段为拉弯组合变形

$$F_N = F_2 = 10000N \qquad M_{\max} = F_1 \times 0.5l = 500N.m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_1} + \frac{F_N}{A_1} = \frac{500\times 32}{\pi\times 0.04^3} + \frac{10000\times 4}{\pi \times 0.04^2} = 87.535MPa < [\sigma]$$

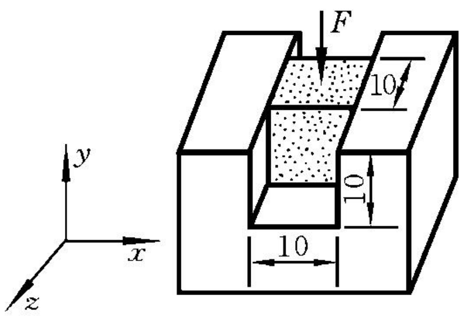
2、校核 AB 段的强度，AB 段为拉弯扭组合变形

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_2} + \frac{F_N}{A_2} = \frac{1000\times 32}{\pi\times 0.06^3} + \frac{10000\times 4}{\pi \times 0.06^2} = 50.694MPa$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{p_2}} = \frac{2000\times 16}{\pi\times 0.06^3} = 47.157MPa$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = 107.07MPa < [\sigma]$$

十四、图示一边长为 10mm 的立方钢块，无间隙地放在刚体槽内，钢材弹性模量 E=200GPa，μ=0.3，设 F=6kN，试计算钢块各侧面上的应力和钢块沿槽沟方向的应变（不计摩擦）　。



解：假定 F 为均布压力的合力，由已知条件：

$$\sigma_y = -\frac{F}{A} = -\frac{6000}{10\times 10} = -60MPa$$

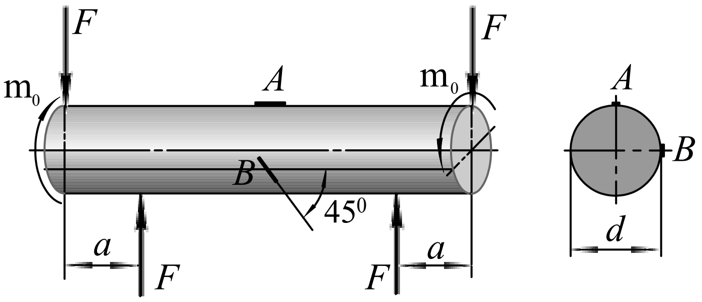
$$\sigma_z = 0 \qquad \varepsilon_x = 0$$

由广义胡克定律

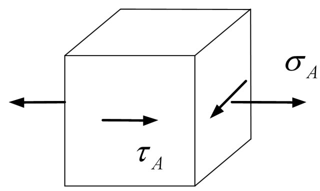
$$e_x = \frac{1}{E}[s_x - m(s_y + s_z)] = 0 \quad Þ \quad s_x = m(s_y + s_z) = -0.3´\ 60 = -18MPa$$

$$e_z = \frac{1}{E}[s_z - m(s_x + s_y)] = \frac{0.3´\ (60+18)´\ 10^{6}}{200´\ 10^{9}} = 117´\ 10^{-6}$$

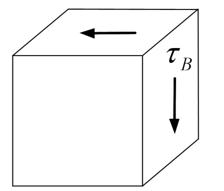
十五、圆截面杆，受横向外力 *F* 和绕轴线的外力偶 m_0 作用。由实验测得杆表面 *A* 点处沿轴线方向的线应变 $\varepsilon_{0^\circ} = 4\times10^{-4}$，杆表面 *B* 点处沿与轴线成 45°方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ} = 3.75\times10^{-4}$。材料的弹性模量 *E* = 200GPa，泊松比 *v* = 0.25，许用应力[*σ*] = 180MPa。试按第三强度理论校核杆的强度。



解：中间段为纯弯曲和扭转的组合变形，画出 A、B 点处的单元体：



（A 点处的单元体）



（B 点处的单元体）

$\sigma_A = \sigma_0 = \sigma_x$；　　　$\tau_A = \tau_B = \tau_{xy}$，

A 点为危险点

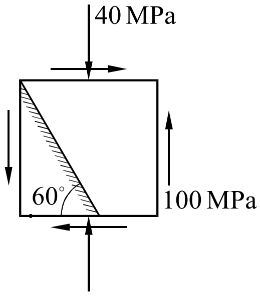
则有：

$$\sigma_0 = \sigma_x = Ee_0 = 80\text{MPa}\ ,\qquad t_{xy} = \frac{Ee_{45^\circ}}{(1+n)} = 59.2\text{MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = 144.2\text{MPa} < [\sigma]$$

十六、图示单元体，试求(1) 指定斜截面上的应力；(2) 主应力大小及主平面位置，并将主平面标在单

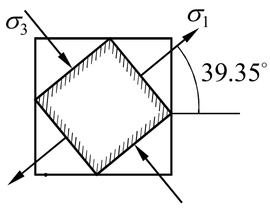
元体上。



解：(1) $\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha = 76.6\ \text{MPa}$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha = -32.7\ \text{MPa}$$

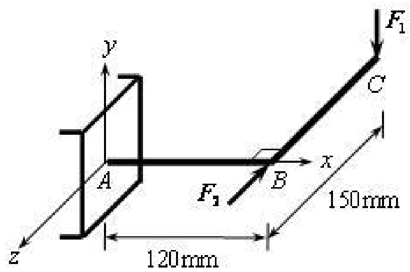
(2) $\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2} = \begin{matrix}81.98\\ -121.98\end{matrix}\ \text{MPa}$



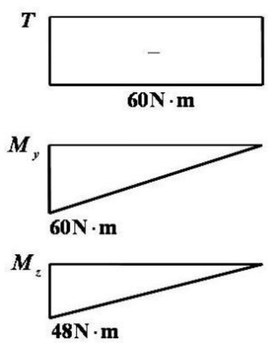
$\sigma_1 = 81.98$ MPa，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -121.98$ MPa

$\alpha_0 = 39.35^\circ$

十七、图所示平面直角刚架 *ABC* 在水平面 *xz* 内，*AB* 段为直径 *d*=20mm 的圆截面杆。在垂直平面内 F_1=0.4kN，在水平面内沿 *z* 轴方向 F_2=0.5kN，材料的[σ]=140MPa。试求：①作 *AB* 段各基本变形的内力图。②按第三强度理论校核刚架 *AB* 段强度。



解：①



②由内力图可判断危险截面在 *A* 处，该截面危险点在横截面上的正应力、切应力为

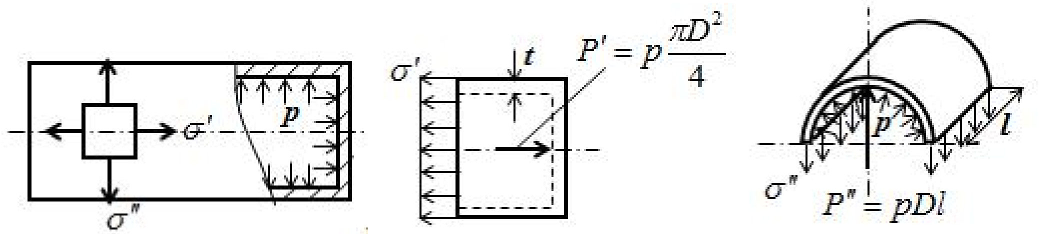
$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{32\times\sqrt{60^2+48^2}}{\pi\times 0.02^3} = 97.8\text{MPa}$$

$$\tau=\frac{T}{W_{\mathrm{p}}}=\frac{16\times 60}{\pi\times 0.02^{3}}=38.2\mathrm{MPa}$$

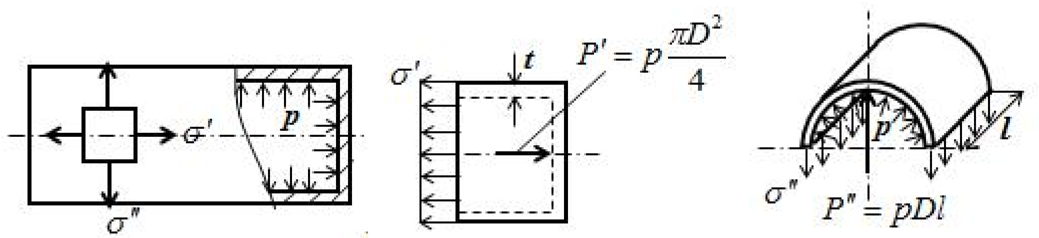
$$\therefore\ \sigma_{\mathrm{r3}}=\sqrt{\sigma^{2}+4\tau^{2}}=\sqrt{97.8^{2}+4\times 38.2^{2}}=124.1\mathrm{MPa}\le[\sigma]$$

所以刚架 *AB* 段的强度满足要求

十八、图示钢制圆柱形薄壁容器,受均布内压 p=3.6MPa 的作用。其平均直径 D=500 mm,材料的许用应力[σ]=160 MPa 。试确定容器的壁厚 t。



解：求横截面和纵截面上的应力



$$\sigma'=\frac{P'}{A'}=\frac{p\pi D^{2}}{4\times\pi Dt}=\frac{pD}{4t}\qquad\qquad \sigma''=\frac{P''}{A''}=\frac{pDl}{2tl}=\frac{pD}{2t}$$

取单元体，求主应力

$$\sigma_{1}=\sigma''=\frac{pD}{2t}\quad \sigma_{2}=\sigma'=\frac{pD}{4t}\quad \sigma_{3}\approx 0$$

塑性材料在二向受拉应力状态按

第三强度理论：$\sigma_{r3}=\sigma_{1}-\sigma_{3}=\dfrac{pD}{2t}\le[\sigma]$

$$t\ge\frac{pD}{2[\sigma]}=\frac{3.6\times 500}{2\times 160}(mm)=5.63mm$$

按第四强度理论：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{1}-\sigma_{2})^{2}+(\sigma_{2}-\sigma_{3})^{2}+(\sigma_{3}-\sigma_{1})^{2}]}=\frac{\sqrt{3}pD}{4t}\le[\sigma]$$

第三强度理论偏于安全 $t\ge\dfrac{\sqrt{3}pD}{4[\sigma]}=\dfrac{\sqrt{3}\times 3.6\times 500}{4\times 160}(mm)=4.87mm$

十九、图示封闭薄壁圆筒,内径 $d=100$ mm,壁厚 $t=2$ mm,承受内压 $p=4$ MPa,外力偶矩 $M_{e}=0.192$ kN·m。

求靠圆筒内壁任一点处的主应力。

解：$\tau_x = \dfrac{0.192\times10^3}{\dfrac{\pi(0.104^4-0.1^4)}{32}}\times0.05 = 5.75$ MPa

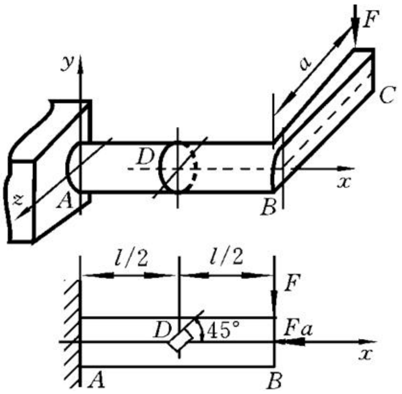
$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t} = 100 \text{ MPa}$$

$$\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} = \begin{matrix}100.7\\ 49.35\end{matrix} \text{ MPa}$$

$\sigma_1 = 100.7$ MPa，$\sigma_2 = 49.35$ MPa，$\sigma_3 = -4$ MPa

二十、图示直角曲拐，C 端受铅垂集中力 F 作用。已知 a=160mm，AB 杆直径 D=40mm，l=200mm ，E=200GPa，μ=0.3，实验测得 D 点沿 45º 方向的线应变 ε 45º =0.265 × 10-3。试求：（1）力 F 的大小；（2）若 AB 杆的[σ]=140MPa，试按最大切应力理论校核其强度。



解：测点在中性轴处为纯剪切应力状态，且有

$$t = \frac{Fa}{W_p} - \frac{4}{3}\times\frac{F}{A} = \frac{16F}{pD^2}\left(\frac{a}{D}-\frac{1}{3}\right) = \frac{E}{1+m}e_{45^\circ}$$

则：$F = \dfrac{E\times e_{45^\circ}}{1+m}\times\dfrac{pD^2}{16\times(4-1/3)} = 3.493kN$

危险截面 A 处内力大小为（不计剪力）

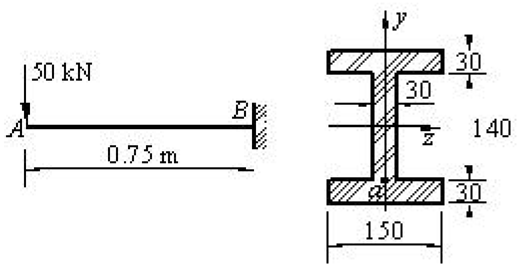
$T = Fa \quad M = Fl$

按最大切应力理论校核强度：

$$s_{r3} = \frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W} = \frac{F\sqrt{l^2+a^2}}{pD^3/32} = 142.39MPa < 1.05[s]$$

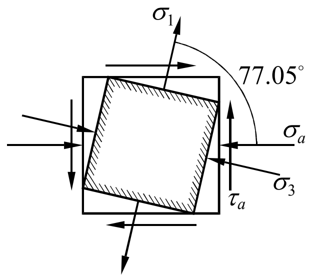
满足强度要求

二十一、图示工字形截面梁 AB，截面的惯性矩 $I_z = 72.56' 10^{-6}$ m⁴，求固定端截面翼缘和腹板交界处点 a 的主应力和主方向。



解：$\sigma = \dfrac{50\times10^3\times0.75\times0.07}{72.56\times10^{-6}} = 36.17$ MPa（压应力）

$$\tau = \frac{50\times10^3\times150\times30\times85\times10^{-9}}{0.03\times72.56\times10^{-6}} = 8.8 \ \text{MPa}$$

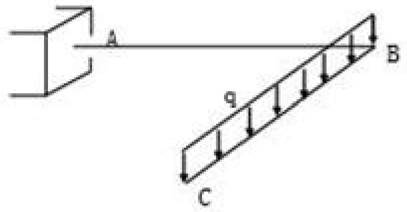


$$\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} = \begin{matrix}2.03\\ -38.2\end{matrix} \ \text{MPa}$$

$\sigma_1 = 2.03$ MPa，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -38.2$ MPa

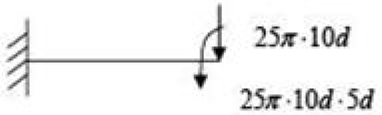
$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2\times8.8}{36.17} = 77.05^\circ$$

二十二、**直角拐的 AB 段的直径为 d，各段长为 AB=BC=10d，在 BC 段上承受均布荷载 q=2.5kN/m 的作用，构件材料的许用应力为$[\sigma]=160MPa$。要求：按第三强度理论设计 AB 段的直径 d。**



解：

危险面上的内力



$T = 125\pi d^2\times10^3$

$M = 250d^2\pi\times10^3$

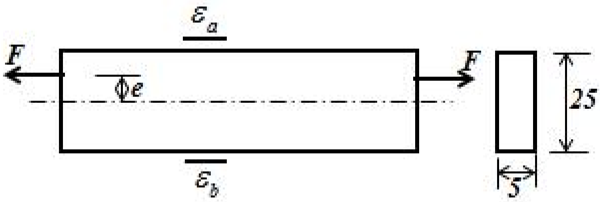
$$\sigma_{r3} = \frac{1}{w}\sqrt{M^2+T^2} \le 160\times10^6$$

$d \ge 32\times1.747\times10^3$

$= 0.0559(m)$

第 9 章　组合变形

一、图示矩形截面钢杆受偏心拉伸，用应变片测得上、下表面的轴向线应变分别为ε a=0.62×10-3，　ε b=0.18×10-3 ，材料的 E=200GPa，[σ]=120MPa 。试校核其强度并求 F 和偏心距 e 。



解:图示偏心拉伸钢杆危险点为各截面上边缘处，杆内各点均为单向应力状态

则有: $s_a = Ee_a = 200创10^9 \quad 0.62 \quad 10^3 \quad 124MPa$

$$s_b = Ee_b = 200创10^9 \quad 0.18 \quad 10^3 \quad 36MPa$$

$$s_{\max} = s_a = 124MPa < 1.05[s] = 126MPa$$

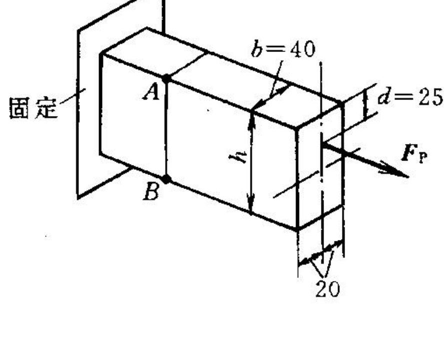
可以认为满足强度要求

又：$s_{\substack{a\\b}} = \dfrac{F_N}{A} \pm \dfrac{M}{W} = \dfrac{F}{A} \pm \dfrac{Fe}{W}$

$$F = \frac{(s_a + s_b)A}{2} = \frac{(124+36)创10^6 \quad 0.005 \quad 0.025}{2}(N) = 10kN$$

$$e = \frac{(s_a - s_b)W}{2F} = \frac{(120-36)创10^6 \quad 0.005 \quad 0.025^2}{2创10 \quad 10^3 \quad 6}(m) = 2.2mm$$

二、所示矩形截面杆在自由端承受位于纵向对称面内的纵向载荷 F_P，已知 F_P = 60kN。试求：1．横截面上点 A 的正应力取最小值时的截面高度 h；　2．在上述 h 值下点 A 的正应力值。



解：

$$\sigma_A = \frac{F_{Nx}}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F_P}{40h} + \frac{F_P(\frac{h}{2} - d)}{\frac{40h^2}{6}} = \frac{F_P}{20}(\frac{2h - 3d}{h^2})$$

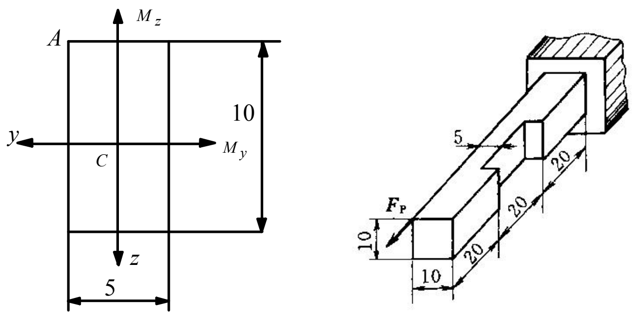
1．令 $\frac{\partial \sigma_A}{\partial h} = 0$，$\frac{6hd - 2h^2}{h^4} = 0$

∴ h = 3d = 75mm

2．由（1）、（2）式得：

$$\sigma_A = \frac{60\times10^3}{20}(\frac{2\ \ 75 - 3\ \ 25}{75^2}) = 40\ \text{MPa}$$

三、正方形截面杆一端固定，另一端自由，中间部分开有切槽。杆自由端受有平行于杆轴线的纵向力 F_P。若已知 F_P =1kN，杆各部分尺寸示于图中。试求杆内横截面上的最大正应力，并指出其作用位置。



解：$A = 5\times10\times10^{-6} = 50\times10^{-6}$ m2

$$W_y = \frac{5\times10^{-2}}{6}\times10^{-9} = \frac{1}{12}\times10^{-6}\ \text{m3}$$

$$W_z = \frac{10\times5^2}{6}\times10^{-9} = \frac{1}{24}\times10^{-6}\ \text{m3}$$

FN_x = 1 kN

$$M_y = 1000\times5\times10^{-3} = 5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

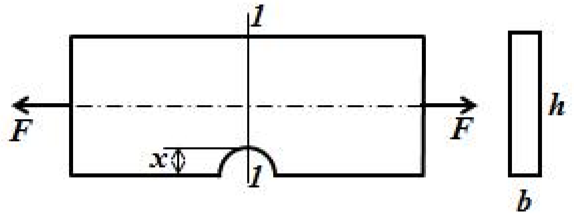
$$M_z = 1000\times2.5\times10^{-3} = 2.5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

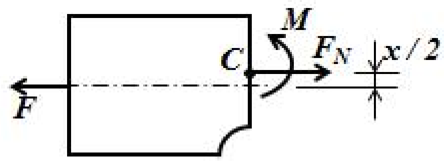
$$\sigma_{\max} = \frac{F_{Nx}}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$= \left(\frac{1000}{50} + \frac{5}{\frac{1}{12}} + \frac{2.5}{\frac{1}{24}}\right)\times10^6 = 140\ \text{MPa}$$

最大正应力作用位置位于中间开有切槽的横截面的左上角点 A

四、图示矩形截面杆受轴向拉力 F=12 kN，材料的许用应力[σ]=100MPa 。求切口的容许深度 x (不计应力集中的影响)。已知 b =5 mm，h = 40 mm 。





解：切口处 1-1 截面为危险截面，对此截面而言，F 为偏心拉力。

$$F_N = F \qquad M = F \times \frac{x}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{A} + \frac{Fx}{2W}$$

其中：$A = b(h - x) \qquad W = b(h - x)^2 / 6$

由强度条件：$\sigma_{\max} \le [\sigma]$

有 $\dfrac{F}{b(h - x)} + \dfrac{3Fx}{b(h - x)^2} \le [\sigma]$

整理得：$x^2 - 128x + 640 \ge 0$

$x \ge 123mm \qquad x \le 5.21mm$

切口的容许深度 为 5.21mm

五、作用于悬臂木梁上的载荷为：*xy* 平面内的 P_1=800 N，*xz* 平面内的 P_2=1650 N。若木材的许用应力[σ]=10 MPa，矩形截面边长之比为 *h/b*=2，试确定截面的尺寸。

解：(1) 求内力

固定端弯矩最大

$$M_{z\max} = P_1 \times 2 = 1600\ Nm \qquad M_{y\max} = P_2 \times 1 = 1650\ Nm$$

(2) 求应力

木梁在 *xy* 平面弯曲而引起的固定端截面上的最大应力为

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{M_{z\max}}{hb^2/6} = \frac{3M_{z\max}}{b^3}$$

木梁在 *xz* 平面弯曲而引起的固定端截面上的最大应力为

$$\sigma''_{\max} = \frac{M_{y\max}}{W_y} = \frac{M_{y\max}}{bh^2/6} = \frac{1.5M_{y\max}}{b^3}$$

(3) 强度计算

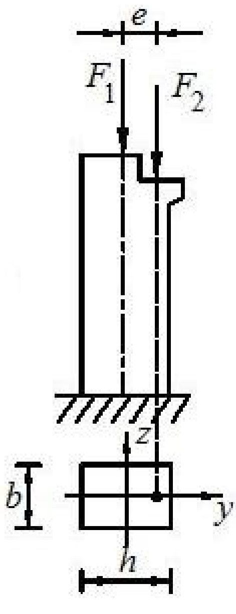
固定端截面上 *a* 点是最大拉应力点，*b* 点是最大压应力点，应力数值大小是

$$\sigma_{\max} = \sigma'_{\max} + \sigma''_{\max} = [\sigma] \qquad \frac{3M_{z\max}}{b^3} + \frac{1.5M_{y\max}}{b^3} = [\sigma]$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{z\max} + 1.5M_{y\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\times1600 + 1.5\times1650}{10\times10^6}} = 90mm$$

$$h = 2b = 180mm$$

六、矩形截面受压柱如图六所示，其中 F_1 的作用线与柱轴线重合， F_2 的作用点位于 y 轴上，已知 $F_1 = F_2 = 80kN$， $b = 240mm$， 偏心距 $e = 100mm$ 。试求柱的横截面上不出现拉应力时 h 的最小值，并在 h 确定后，求柱横截面上的最大压应力。



解：将 F_2 平移到柱轴线上，则柱为轴向压缩与弯曲的组合变形。

$$F_N = F_1 + F_2 = 160kN \qquad M_z = F_2 e = 8kN\cdot m$$

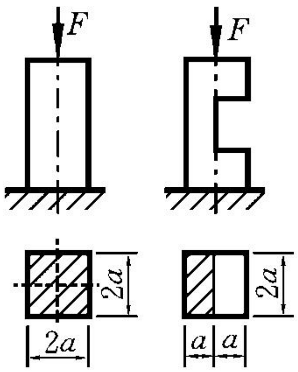
柱的横截面上不出现拉应力时 h 取最小值，说明中性轴位于截面左侧边缘，

$$\sigma = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{160\times10^3}{240h} + \frac{8\times10^6}{\frac{240h^2}{6}} = 0$$

$$h = 300mm$$

此时，$\sigma_{c\max} = -\frac{F_N}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{160\times10^3}{240\times300} - \frac{8\times10^6}{\frac{240\times300^2}{6}} = -4.44MPa$

七、在正方形截面短柱的中部开一槽，其面积为原面积的一半，问最大压应力增大几倍？



解：未开槽短柱受轴载作用，柱内各点压应力为

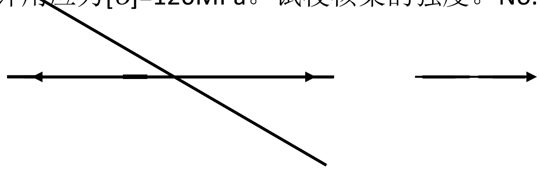
$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{4a^2}$$

开槽短柱削弱段受偏心压力，最大压应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{2a^2} + \frac{F\times a/2}{2a\times a^2/6} = 8\times\frac{F}{4a^2}$$

故最大压应力增大 7 倍

八、图示起重架的最大起吊重量（包括行走小车等）为 *P*=40 kN，横梁 *AC* 由两根 No18 槽钢组成，材料为 Q235 钢，许用应力[σ]=120MPa。试校核梁的强度。No.18 工字钢：$W_y = 152cm^3$ $A = 29.299cm^2$

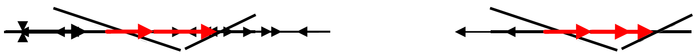


解：

$$\sigma_{\max} = \left|\sigma_{c\max}\right| = \frac{N}{2A} + \frac{M_{\max}}{2W_y} = \frac{34.64\times10^3}{2\times29.299\times10^{-4}} + \frac{35\times10^3}{2\times152\times10^{-6}}$$

$$= 5.9 + 115.1 = 121\ MPa \prec 1.05[\sigma]$$

九、在力 P 和 H 联合作用下的短柱如图所示。试求固定端截面上角点 A、B、C、D 的正应力。



参考答案：(1) 将力 P 和 H 向截面形心简化

$$M = 25\times10^3\times0.025 = 625\ N.m$$

(2) 截面 $ABCD$ 上的内力

$$N = -P = -25\ kN$$

$$M_y = M = 625\ N.m$$

$$M_z = H\times0.6 = 3\ kN.m$$

(3) 截面几何性质

$$A = 0.15\times0.1 = 0.015\ m^2$$

$$W_z = \frac{1}{6}\times0.1\times0.15^2 = 3.75\times10^{-4}\ m^3$$

$$W_y = \frac{1}{6}\times0.15\times0.1^2 = 2.5\times10^{-4}\ m^3$$

(4) A 点的正应力

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{\left(-25\times10^3\right)}{0.015} + \frac{625}{2.5\times10^{-4}} + \frac{3000}{3.75\times10^{-4}}$$

$$= -1.67\times10^6 + 2.5\times10^6 + 8\times10^6 = 8.83\ MPa$$

B 点的正应力

$$\sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \left(-1.67 - 2.5 + 8\right)\times10^6 = 3.83\ MPa$$

C 点的正应力

$$\sigma_C = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \left(-1.67 - 2.5 - 8\right)\times10^6 = -12.17\ MPa$$

D 点的正应力

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \left(-1.67 + 2.5 - 8\right) \times 10^6 = -7.17\ MPa$$

十、图示钻床的立柱为铸铁制成，P=15 kN，许用拉应力为[σ_t]=35 MPa。试确定立柱所需要的直径 d。

解：(1) 内力分析

如图作截面取上半部分，由静力平衡方程可得

$$N = P = 15kN \qquad M = 0.4P = 6kNm$$

所以立柱发生拉弯变形。

(2) 强度计算

先考虑弯曲应力

$$\sigma_{t\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi d^3} \le \left[\sigma_t\right]$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi\left[\sigma_t\right]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 6 \times 10^3}{\pi \times 35 \times 10^6}} = 120.4\ mm$$

取立柱的直径 d = 122 mm，校核其强度

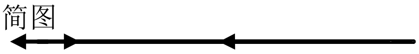
$$\begin{aligned}\sigma_{t\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{4 \times 15 \times 10^3}{\pi \times 0.122^2} + \frac{32 \times 6 \times 10^3}{\pi \times 0.122^3} \\ &= 1.28 + 33.66 = 34.94\, MPa \prec [\sigma_t]\end{aligned}$$

立柱满足强度要求。

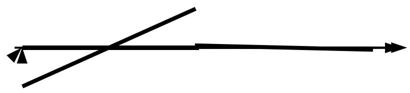
注：在组合变形的截面几何尺寸设计问题中，先根据主要变形设计，然后适当放宽尺寸进行强度校核，这是经常使用的方法。

十一、图示手摇铰车的轴的直径 d=30 mm，材料为 Q235 钢，[σ]=80 MPa。试按第三强度理论求铰车的最大起重量 P。

解：(1) 轴的计算简图



画出铰车梁的内力图



危险截面在梁中间截面左侧

$$\boldsymbol{M}_{\max}=0.2\boldsymbol{P}\qquad \boldsymbol{T}=0.18\boldsymbol{P}$$

(2) 强度计算

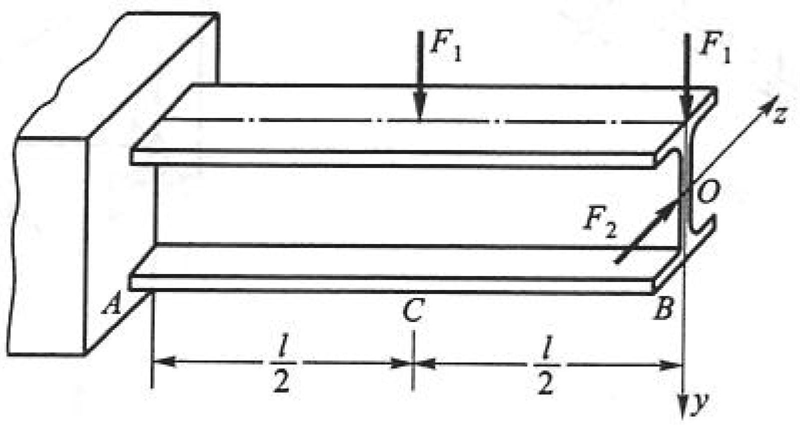
第三强度理论

$$\boldsymbol{\sigma}_{r3}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{T}^2}}{\boldsymbol{W}}=\frac{32}{\boldsymbol{\pi d}^3}\sqrt{(0.2\boldsymbol{P})^2+(0.18\boldsymbol{P})^2}\le[\boldsymbol{\sigma}]$$

$$\boldsymbol{P}\le\frac{\boldsymbol{\pi d}^3[\boldsymbol{\sigma}]}{32\sqrt{(0.2)^2+(0.18)^2}}=\frac{\boldsymbol{\pi}\times0.03^3\times80\times10^6}{32\sqrt{(0.2)^2+(0.18)^2}}=788\boldsymbol{N}$$

所以铰车的最大起重量为 788N

十二、14 号工字钢悬臂梁受力情况如图所示。已知 $l=0.8m$， $F_1=2.5kN$， $F_2=1.0kN$， 试求危险截面上的最大正应力。（$W_z=102cm^3$，$W_y=16.1cm^3$）



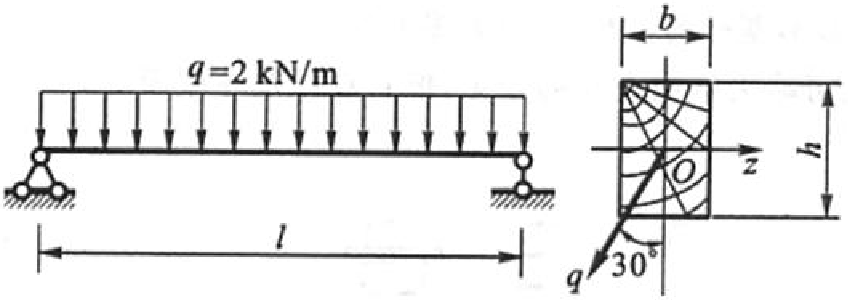
解：危险截面在固定端，拉断的危险点在前上角点，压断的危险点在后下角，因钢材的拉压性能相同，故只计算最大拉应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M_z}{W_z}+\frac{M_y}{W_y}=\frac{\frac{3}{2}F_1 l}{W_z}+\frac{F_2 l}{W_y}$$

式中，W_z，W_y 由 14 号工字钢，查型钢表得到 $W_z=102cm^3$，$W_y=16.1cm^3$ 。故

$$\sigma_{\max}=\frac{3\times2.5\times10^3N\times0.8m}{2\times102\times10^{-6}m^3}+\frac{1.0\times10^3N\times0.8m}{16.1\times10^{-6}m^3}=79.1\times10^6Pa=79.1MPa$$

十三、受集度为 q 的均布荷载作用的矩形截面简支梁，其荷载作用面与梁的纵向对称面间的夹角为 $\alpha=30^0$，如图所示。已知该梁材料的弹性模量 $E=10GPa$；梁的尺寸为 $l=4m$，$h=160mm$，$b=120mm$；许用应力 $[\sigma]=12MPa$；试校核梁的强度。



解：（1）强度校核

$q_y=q\cos30^0=2\times0.866=1.732(kN/m)$ （正 y 方向↓）

$q_z=q\sin30^0=2\times0.5=1(kN/m)$ （负 z 方向←）

$$M_{zmaz}=\frac{1}{8}q_y l^2=\frac{1}{8}\times 1.732\times 4^2=3.464(kN\cdot m)$$ 出现在跨中截面

$$M_{ymaz}=\frac{1}{8}q_z l^2=\frac{1}{8}\times 1\times 4^2=2(kN\cdot m)$$ 出现在跨中截面

$$W_z=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}\times 120\times 160^2=512000(mm^3)$$

$$W_y=\frac{1}{6}hb^2=\frac{1}{6}\times 160\times 120^2=384000(mm^3)$$

最大拉应力出现在左下角点上：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{3.464\times 10^6 N\cdot mm}{512000mm^3}+\frac{2\times 10^6 N\cdot mm}{384000mm^3}=11.974MPa$$

因为 $\sigma_{\max}=11.974MPa$，$[\sigma]=12MPa$，即：$\sigma_{\max}<[\sigma]$

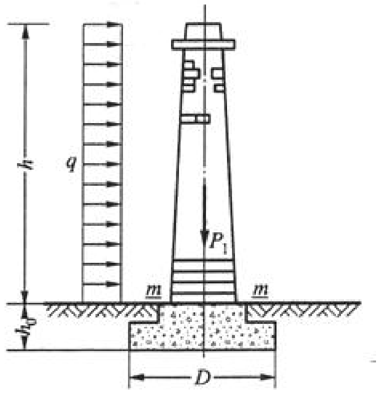
所以 满足正应力强度条件，即不会拉断或压断，亦即强度上是安全的。

十四、砖砌烟囱高 $h=30m$，底截面 $m-m$ 的外径 $d_1=3m$，内径 $d_2=2m$，自重 $P_1=2000kN$，受 $q=1kN/m$ 的风力作用。试求：

（1）烟囱底截面上的最大压应力；

（2）若烟囱的基础埋深 $h_0=4m$，基础及填土自重按 $P_1=1000kN$ 计算，土壤的许用压应力 $[\sigma]=0.3MPa$，圆形基础的直径 D 应为多大？

注：计算风力时，可略去烟囱直径的变化，把它看作是等截面的。



解：烟囱底截面上的最大压应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{P_1}{A} + \frac{\frac{qh^2}{2}}{W} = \frac{2000\times10^3}{\frac{\pi(3^2-2^2)}{4}} + \frac{\frac{1}{2}\times1\times10^3\times30^2}{\frac{\pi(3^4-2^4)}{64}\times\frac{1}{3/2}}$$

$= 0.508\,\text{MPa} + 0.212\,\text{MPa} = 0.72\,\text{MPa}(\text{压})$

土壤上的最大压应力 $\sigma_{\max}$ ：

$$\sigma_{\max} = \frac{P_1+P_2}{\frac{\pi D^2}{4}} + \frac{qh(\frac{h}{2}+h_0)}{\frac{\pi D^3}{32}} \le [\sigma]$$

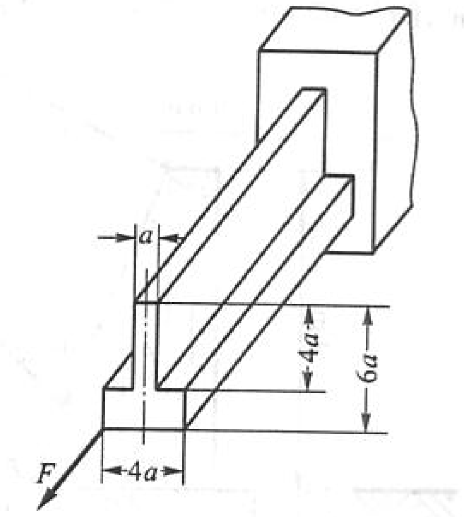
$$\sigma_{\max} = \frac{(2000+1000)\times10^3}{\frac{\pi D^2}{4}} + \frac{1\times10^3\times30\times(\frac{30}{2}+4)}{\frac{\pi D^3}{32}} \le 0.3\times10^6$$

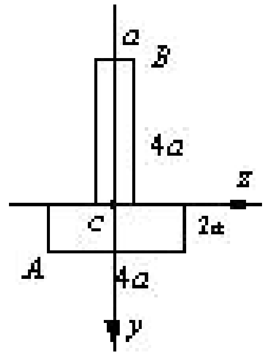
即 $$\frac{3.82\times10^6}{D^2} + \frac{5.81\times10^6}{D^3} \le 0.3\times10^6$$

即 $$0.3D^3 - 3.82D - 5.81 = 0$$

解得： $D = 4.17$ m

十五、试求图示杆内的最大正应力。力 F 与杆的轴线平行。





解：（1）求 T 形截面的形心位置

形心在 y 轴上，$y_C=\dfrac{-a\cdot 8a^2+2a\cdot 4a^2}{8a^2+4a^2}=0$

（2）把力 F 先向 y 轴平移，产生一个 $M_y=-F\cdot 2a=-2Fa$；

然后，再把 F 向 z 轴平移，又产生一个 $M_z=-F\cdot 2a=-2Fa$。

故，T 形截面的杆件是拉伸与双向弯曲的组合变形构件。

（3）判断最大拉应力与最大压应力出现的位置

由 M_y、M_z 的方向（正负号）可知，A 点处拉应力最大，B 点处压应力最大。

（4）计算最大拉应力

$$I_z=[\frac{1}{12}\cdot 4a\cdot(2a)^3+a^2\cdot 8a^2]+[\frac{1}{12}\cdot a\cdot(4a)^3+(2a)^2\cdot 4a^2]=32a^4$$

$$I_y=\frac{4a\cdot a^3}{12}+\frac{2a\cdot(4a)^3}{12}=11a^4$$

$$\sigma_{t\max}=\sigma_A=\frac{F}{A}+\frac{M_y z_A}{I_y}+\frac{M_z y_A}{I_z}$$

$$=\frac{F}{12a^2}+\frac{2aF\cdot 2a}{11a^4}+\frac{2aF\cdot 2a}{32a^4}=\frac{151F}{264a^2}\approx 0.572\frac{F}{a^2}$$

（5）计算最大压应力

$$\sigma_{c\max} = \sigma_B = \frac{F}{A} - \frac{M_y z_B}{I_y} - \frac{M_z y_A}{I_z}$$

$$= \frac{F}{12a^2} - \frac{2aF \cdot 0.5a}{11a^4} - \frac{2aF \cdot 4a}{32a^4} = -\frac{17F}{66a^2} \approx -0.258\frac{F}{a^2}$$

故杆内的最大正应力是：$\sigma_{t\max} = \sigma_A = 0.572\dfrac{F}{a^2}$。

十六、有一高为$1.2m$、厚为$0.3m$的混凝土墙，浇筑于牢固的基础上，用作挡水用的小坝。试求：

（1）当水位达到墙顶时，墙底处的最大拉应力和最大压应力（高混凝土的密度为$2.45\times10^3 kg/m^3$）；

解：求墙底处的最大拉应力和最大压应力

沿墙长方向取$1m$作为计算单元，则墙的重力为：

$$G = (0.3\times1\times1.2)\times2.45\times9.8 = 8.6436(kN) \quad （\downarrow）$$

作用在墙底处的水压力为：

$$q = \gamma \cdot h \times 1 = 9.8\times1.2\times1 = 11.76(kN/m)$$

墙底处的弯矩：

$$M = (\frac{1}{2}\times11.76\times1.2)\times\frac{1}{3}\times1.2 = 2.8224(kN\cdot m)$$

混凝土墙为压弯构件，墙底的应力为：

$$\sigma_{c\max} = -\frac{G}{A} - \frac{M}{W_z} = -\frac{8.6436kN}{0.3\times1m^2} - \frac{2.8224kN\cdot m}{\frac{1}{6}\times1\times0.3^2 m^3} = -216.972kPa = -0.217MPa \text{（右）}$$

$$\sigma_{t\max} = -\frac{G}{A} + \frac{M}{W_z} = -\frac{8.6436kN}{0.3\times1m^2} + \frac{2.8224kN\cdot m}{\frac{1}{6}\times1\times0.3^2 m^3} = 159.348kPa = 0.159MPa \text{（左）}$$

十七、一圆截面杆受偏心力作用，偏心距$e = 20mm$，杆的直径为$70mm$，许用应力$[\sigma]$为$120MPa$。试求杆的许可偏心拉力值。

解：杆为拉弯组合变形构件。最大拉应力为：

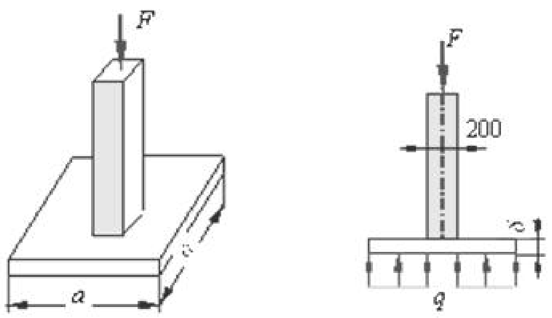
$$\sigma_{t\max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32Fe}{\pi d^3} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32Fe}{\pi d^3} \le [\sigma]$$

$$F \le \frac{[\sigma]}{\frac{4}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}} = \frac{120N/mm^2}{\frac{4}{3.14\times70^2 mm^2} + \frac{32\times20mm}{3.14\times70^3 mm^3}} = 140480.8695N \approx 140.481(kN)$$ 即：

$F_{\max} = 140.481(kN)$ 。

十八、正方形截面的混凝土柱，其横截面边长为 $200mm$ ，其基底为边长 $a = 1m$ 的正方形混凝土板。柱承受轴向压力 $F = 100kN$ ，如图所示。假设地基对混凝土板的支反力为均匀分布，混凝土的许用切应力为 $[\tau] = 1.5MPa$ ，试问为使柱不穿过板，混凝土板所需的最小厚度 δ 应为多少？



解：混凝土板的重量，基压力为：

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{100 \times 10^3 N}{1000 \times 1000 mm^2} = 0.1MPa$$

剪力为：

$$Q = F - pA$$

$$= 100000N - 0.1N/mm^2 \times 200 \times 200mm^2$$

$$= 96000N = 96kN$$

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{96000N}{4 \times 200\delta mm^2} \le [\tau] = 1.5$$

$$\frac{96000}{4 \times 200\delta} \le 1.5$$

$$\delta \ge \frac{96000}{4 \times 200 \times 1.5} = 80(mm)$$

$$[\delta] = 80mm$$

第 10 章　压杆稳定

一、图示矩形截面压杆，有三种支持方式。杆长 l＝300 mm，截面宽度 b＝20 mm，高度 h＝12 mm，弹性模量 E＝70 GPa，λ_p＝50，λ_0＝30，中柔度杆的临界应力公式为σ_{cr}＝382 MPa – (2.18 MPa)λ试计算它们的临界载荷，并进行比较。

解：(a)

(1) 比较压杆弯曲平面的柔度：

$$I_y \prec I_z \qquad i_y \prec i_z \qquad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} \qquad \lambda_z = \frac{\mu l}{i_z}$$

$$\therefore \lambda_y \succ \lambda_z$$

长度系数：　μ=2

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{\sqrt{12}\mu l}{h} = \frac{\sqrt{12}\times 2\times 0.3}{0.012} = 173.2$$

(2) 压杆是大柔度杆，用欧拉公式计算临界力；

$$P_{cr(a)} = \sigma_{cr}\times A = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}\times A = \frac{\pi^2\times 70\times 10^9}{173.2^2}\times 0.02\times 0.012 = 5.53\ kN$$

(b)

(1) 长度系数和失稳平面的柔度：

$$\mu = 1$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{\sqrt{12}\mu l}{h} = \frac{\sqrt{12}\times 1\times 0.3}{0.012} = 86.6$$

(2) 压杆仍是大柔度杆，用欧拉公式计算临界力；

$$P_{cr(b)} = \sigma_{cr}\times A = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}\times A = \frac{\pi^2\times 70\times 10^9}{86.6^2}\times 0.02\times 0.012 = 22.1\ kN$$

(c)

(1) 长度系数和失稳平面的柔度：

$$\mu = 0.5$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{\sqrt{12}\mu l}{h} = \frac{\sqrt{12} \times 0.5 \times 0.3}{0.012} = 43.3$$

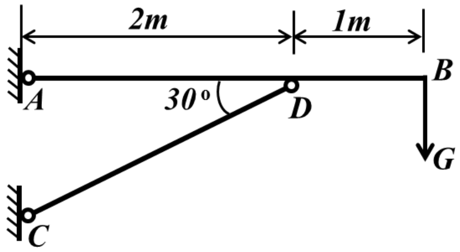
(2) 压杆是中柔度杆，选用经验公式计算临界力

$$P_{cr(c)} = \sigma_{cr} \cdot A = \left(a - b\lambda\right)A = (382 - 2.18 \times 43.3) \times 10^6 \times 0.02 \times 0.12$$
$$= 69.0kN$$

三种情况的临界压力的大小排序：

$$\therefore P_{cr(a)} < P_{cr(b)} < P_{cr(c)}$$

二、简易吊车最大起吊重量 G=50kN，CD 压杆为空心圆杆,其内、外径分别为 d=6cm, D=8cm，材料为 Q235 钢，λp=100，λs=57，E=200GPa，稳定安全系数 nst=4，试校核压杆稳定性。



解：确定压杆的柔度。

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{pD^4(1- a^4)/64}{pD^2(1- a^2)/4}} = \frac{D}{4}\sqrt{1+ a^2}$$

$$= \frac{0.08}{4}\sqrt{1- 驱\frac{0.06}{0.08}\frac{\div}{\div}^2} = 0.025m$$

两端铰支压杆：$m = 1 \quad l = 2/\cos 30° = 2.309m$

$l = \frac{ml}{i} = \frac{1 ´ \ 2.309}{0.025} = 92.36 \qquad l_s < l < l_p$ CD 压杆为中长杆

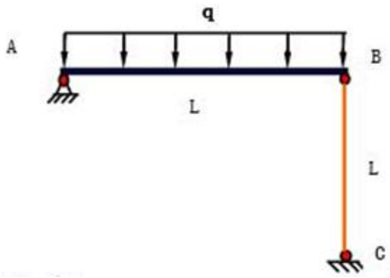
$$s_{cr} = a - bl = 304 - 1.12棒92.36 \quad 201MPa$$

$$F_{cr} = s_{cr} \ A \quad 201创10^6 \quad p(0.08^2 - 0.06^2)/4(N) = 442kN$$

由平衡条件：$å \ M_A = 0 \quad F_{NCD}\sin 30° ´ \ 2 = G ´ \ 3 \quad F_{NCD} = 3G = 150kN$

$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{442}{150} = 2.95 < n_{st}$ CD 压杆稳定性不够

三、刚性横梁 **AB** 与铅直立柱 **BC** 组成的结构如图。**BC** 材料的弹性模量 **E=200GPa**，比例极限为 $\sigma_P=100MPa$，屈服极限 $\sigma_S=100MPa$ **,a=304MPa ,b=1.12MPa**。稳定安全系数 n_{rt}**=5**，**L=2m**，均布荷载的集度 **q=2KN/m**，校核 **BC** 杆的稳定性。



解：

$$1.\ F_{BC}=\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}\times2\times2=2(KN)$$

$$2.\ \lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times2}{\frac{35}{4}\times10^3}=\frac{8\times1000}{35}>\lambda_1$$

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}\approx100$$

∴

$$F_{BDcr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}$$
$$=\frac{3.14^2\times200\times10^9}{L^2}\times\frac{\pi}{64}\times0.0354$$
$$=36.295(KN)$$

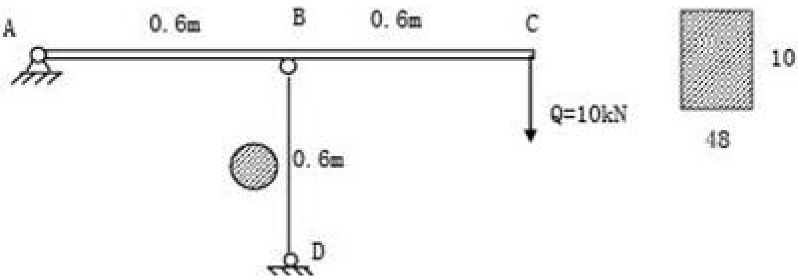
3.

$$n=\frac{F_{cr}}{F}$$
$$=\frac{36.295}{2}$$
$$=18.15$$

4. 结论：

稳定性满足要求

四、铅直立柱 **BD** 与水平横梁 **ABC** 为相同材料，材料的弹性模量 **E=200GPa**，比例极限为 $\sigma_P=100MPa$，限 $\sigma_S=100MPa$ **,a=304MPa ,b=1.12MPa**。立柱 **BD** 为实心圆截面，直径为 **D=20** 毫米，横梁 **ABC** 采用 **48mm** ×**100mm** 的矩形截面，竖放：**AB=BC=CD=0.6m**;稳定安全系数 n_{rt}**=2**，屈服安全系数 n_{st}**=1.5**，受力如图所示。校核该结构的安全性。



解：

对立柱

1. $\lambda=\frac{ml}{i}=\frac{1\times600}{\frac{20}{4}}=120$ $\lambda_1\approx100$

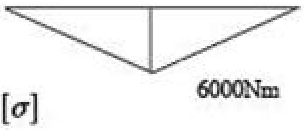
2. $\lambda\geq\lambda_1$ 用欧拉公式

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=42.998KN$$

3. $\frac{P_{cr}}{P_{\max}}=\frac{42.998}{20}=2.1>n_{st}$

安全

对横梁



$$\sigma_{\max}=\frac{6000}{\frac{b}{6}h^2}=75MPa<[\sigma]$$

结论：结构安全

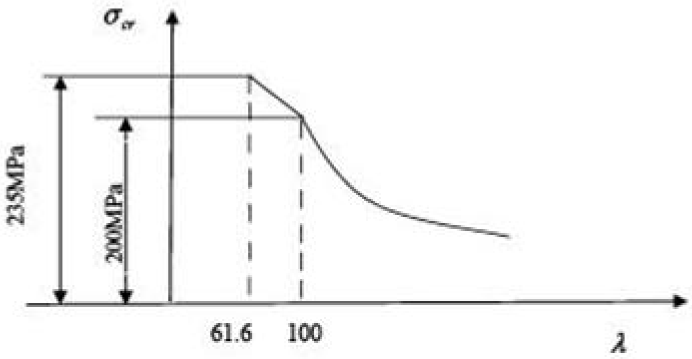
五、桁架中直径为 **d m**，长度为 **L m** 的圆截面压杆，材料为普通碳钢，弹性模量 **E=200GPa**,比例极限 $\sigma_P=200MPa$ ，屈服极限$\sigma_S=235MPa$ 。其中$a=304MPa$ $b=1.12MPa$ 。要求：（**1**）绘出临界应力总图 （**2**）确定可以用欧拉公式计算压杆临界力的最小杆件长。

解：

1.

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}\approx100$$

$$\lambda_2=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{304-235}{1.12}=61.6$$



2.

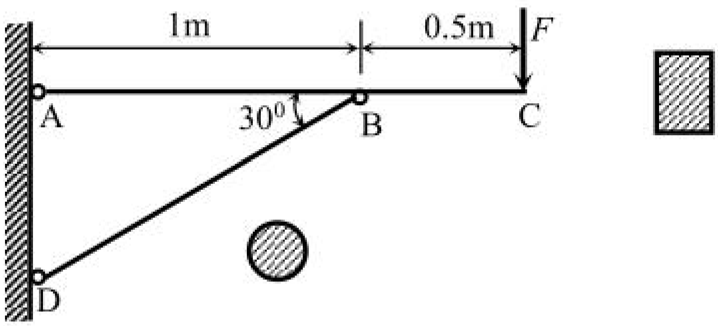
$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{L}{\frac{d}{4}}=\frac{4L}{d}$$

$\lambda \geq \lambda_1$ 用欧拉公式

$$\therefore \quad \frac{4L}{d} \geq 100$$

$\therefore L \geq 25d$（m）

六、图示托架，其斜杆 BD 为直径 d=20mm 的圆截面杆，水平杆 AC 为 100mm×150mm 的矩形截面杆，已知两杆材料的弹性模 E=200GPa，材料的许用应力[σ]=170MPa，材料柔度的界限值 λ_p =100，稳定安全系数 n_{st} =2.5，非细长压杆的临界应力公式为 $\sigma_{cr}=240-0.00682\lambda^2$ (MPa)，荷载 F=50kN，试校核此结构的安全性。



解：1、校核 AC 杆件：B 截面左侧为危险截面

$$F_N=129.9kN \quad M_{\max}=25kN.m$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_{AC}}+\frac{F_N}{A_{AC}}$$
$$=\frac{25000\times6}{0.1\times0.15^2}+\frac{129900}{0.1\times0.15}$$
$$=73.5MPa<[\sigma]$$

2、校核 BD 杆件的稳定性

$$\lambda=\frac{\mu l_{BD}}{i_{BD}}=\frac{1\times(1000/\cos 30^0)}{60/4}=76.98<100$$

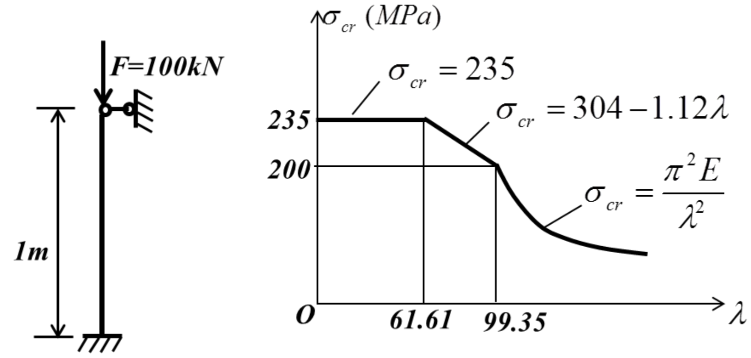
$$F_{cr}=\sigma_{cr}A_{BD}=(240-0.00682\times76.98^2)\times\frac{\pi\times60^2}{4}=564.31kN$$

$$\frac{F_{cr}}{F_{BD}}=\frac{564.31}{150}=3.76>2.5$$

满足强度和稳定条件

七、图示杆件由 Q235 钢制成，该材料的弹性极限 σ_p=200MPa，屈服极限 σ_s= 235MPa ，弹性模量

E=200GPa，中长杆经验公式σcr=304 -1.12λ ，其中σcr 单位为 MPa， λ为压杆的柔度。（1）试画临界应力总图并在图中标出特征点。（2）图中杆为 d=35mm 的实心圆杆，稳定安全系数 nst=2.4，试校核该杆的稳定性。



解: (1) $\lambda_p=\sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2\times 200\times 10^9}{200\times 10^6}}=99.35$

$$\lambda_s=\frac{304-\sigma_s}{1.12}=\frac{304-235}{1.12}=61.61$$

(2) 计算压杆的柔度

$$\mu=0.7\quad i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{d}{4}\quad \lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.7\times 1}{0.035/4}=80$$

$\lambda_s<\lambda<\lambda_p$ 该压杆为中长杆

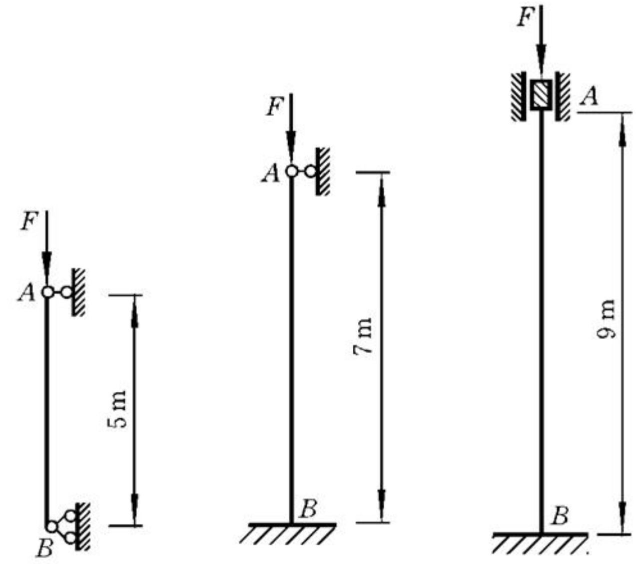
$$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda=304-80\times 1.12=214.4(MPa)$$

压杆应力为

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{4F}{\pi d^2}=\frac{4\times 100\times 10^3}{\pi\times 0.035^2}Pa=103.9MPa$$

$n=\dfrac{\sigma_{cr}}{\sigma}=\dfrac{214.4}{103.9}=2.06<2.4$ 该压杆稳定性不足

八、如图所示各压杆的直径 d 均相同，且 d=16cm，材料均为 Q235 钢。试判断哪一种压杆的临界载荷 F_{cr} 最大?



（a）　　（b）　　（c）

解：$F_{cr}=\dfrac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\dfrac{\pi^2EA}{\lambda^2}\quad(\lambda>100)\qquad \lambda=\dfrac{\mu l}{i}$

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}}=\frac{d}{4}=40mm$$

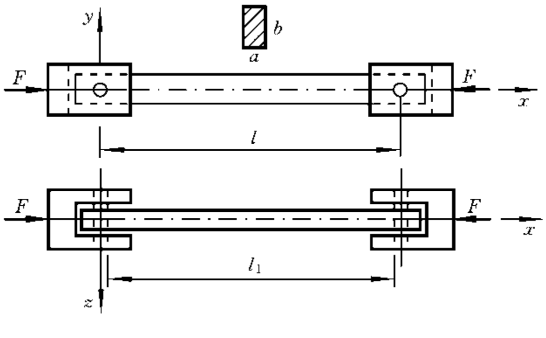
$$(a)\quad \mu=1\quad \lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{5}{0.04}=125$$

$$(b)\quad \mu=0.7\quad \lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.7\times 7}{0.04}=122.5$$

$$(c)\quad \mu=0.5\quad \lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.5\times 9}{0.04}=112.5$$

故压杆 C 的临界载荷 F_{cr} 最大

九、由 Q235 钢组成的矩形截面压杆，其两端用铰销支承。已知截面尺寸：a=40mm，b=60mm。设 l=2.1m，l1=2m，E=205GPa，σp=200MPa，试求此压杆的临界压力。



解：首先确定压杆的柔度。截面对其两个形心主轴的惯性半径不同，且压杆在两个主惯性平面内的支承情况也不同，应分别计算。

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{ab^3/12}{ab}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = 17.32mm$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{ba^3/12}{ab}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 11.55mm$$

xy 平面内为两端铰支：$\lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{1 \times 2100}{17.32} = 121.2$

xz 平面内为两端固定：$\lambda_y = \frac{\mu l_1}{i_y} = \frac{0.5 \times 2000}{11.55} = 86.6$

$\lambda = \lambda_{\max} = \lambda_z = 121.2$

判断临界压力的适用公式：$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 205 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 100.6 < \lambda$

此压杆为细长杆，有：$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 205 \times 10^9}{121.2^2} Pa = 137.7MPa$

$F_{cr} = \sigma_{cr} \times A = 330.5kN$

十、有一长 *l*=300 mm，截面宽 *b*=6 mm、高 *h*=10 mm 的压杆。两端铰接，压杆材料为 Q235 钢，*E*=200GPa，试计算压杆的临界应力和临界力。

参考答案：（1）求惯性半径 i

对于矩形截面，如果失稳必在刚度较小的平面内产生，故应求最小惯性半径

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12} \times \frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = 1.732 \text{ mm}$$

（2）求柔度 λ

$$\lambda = \mu l / i, \quad \mu = 1,$$

故 $\lambda = 1 \times 300/1.732 = 519 > \lambda_p = 100$

（3）用欧拉公式计算临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 20 \times 10^4}{(173.2)^2} = 65.8 \text{ MPa}$$

（4）计算临界力

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \times A = 65.8 \times 6 \times 10 = 3948 \text{ N} = 3.95 \text{ kN}$$

十一、 有一长 l=300 mm，截面宽 b=6 mm、高 h=10 mm 的压杆。两端铰接，压杆材料为 Q235 钢，E=200 GPa，

试计算压杆的临界应力和临界力。
参考答案：（1）求惯性半径 i
对于矩形截面，如果失稳必在刚度较小的平面内产生，故应求最小惯性半径

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12} \times \frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = 1.732 \text{ mm}$$

（2）求柔度 λ

$$\lambda = \mu l / i, \quad \mu = 1,$$

故 $\lambda = 1 \times 300/1.732 = 519 > \lambda_p = 100$
（3）用欧拉公式计算临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 20 \times 10^4}{(173.2)^2} = 65.8 \text{ MPa}$$

（4）计算临界力

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \times A = 65.8 \times 6 \times 10 = 3948 \text{ N} = 3.95 \text{ kN}$$

十二、一根两端铰支钢杆，所受最大压力 $P = 47.8KN$ 。其直径 $d = 45mm$，长度 $l = 703mm$ 。钢材的 E=210GPa， σ_p =280MPa， $\lambda_2 = 43.2$ 。计算临界压力的公式有：(a) 欧拉公式；(b) 直线公式 σ_{cr} =461-2.568λ (MPa)。

试 （1）判断此压杆的类型；
（2）求此杆的临界压力；

参考答案：（1） $\mu = 1$ $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} = 86$ $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\frac{d}{4}} = 62.5$

由于 $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$，是中柔度杆。 （2） σ_{cr} =461-2.568λ MPa

$$P_{cr} = \sigma_{cr} A = 478KN$$

十三、活塞杆（可看成是一端固定、一端自由），用硅钢制成，其直径 $d=40mm$，外伸部分的最大长度 $l=1m$，弹性模量 E=210Gpa， $\lambda_1 = 100$ 。
试（1）判断此压杆的类型；（2）确定活塞杆的临界载荷。

参考答案：看成是一端固定、一端自由。此时 $\mu = 2$

$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$，而 $I = \frac{\pi}{64} d^4$, $A = \frac{\pi}{4} d^2$，所以， $\sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4}$。

$\therefore \quad \lambda = \frac{2 \times 1}{0.01} = 200 > \lambda_p = 100$ 故属于大柔度杆-

用大柔度杆临界应力公式计算。

$$\therefore \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200^2} = 51.8\text{MPa}$$

$$\therefore \quad F_{cr} = \sigma_{cr} A = 51.8 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times (0.04)^2 = 65.1\text{kN}$$

十四、一端固定另一端自由的细长压杆，其杆长 l = 2m，截面形状为矩形，b = 20 mm、h = 45 mm，材料的弹性模量 E = 200GPa 。试计算该压杆的临界力。

参考答案：

（1）计算压杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 2000}{20/\sqrt{12}} = 692.8 > \lambda_c = 123$$（所以是大柔度杆，可应用欧拉公式）

(2)计算截面的惯性矩

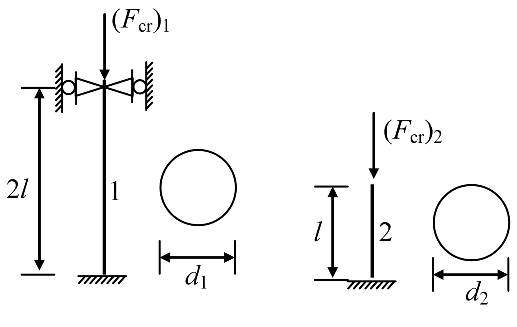
由前述可知，该压杆必在 xy 平面内失稳，故计算惯性矩

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{45 \times 20^3}{12} = 3.0 \times 10^4 mm^4$$

（3）计算临界力

μ = 2，因此临界力为 $Fcr = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \dfrac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-8}}{(2 \times 2)^2} = 3701N = 3.70kN$

十五、图中的 1、2 杆材料相同，均为圆截面压杆，若使两杆的临界应力相等。试求两杆的直径之比 d_1/d_2，以及临界力之比 $(F_{cr})_1/(F_{cr})_2$。并指出哪根杆的稳定性好。



解答：由临界应力总图可知，σ_{cr} 相同，则 λ 值相同，$\lambda_1 = \lambda_2$

对 1 杆，
$$\lambda = \frac{\mu_1 \mu_1}{i_1} = \frac{\mu_1 \mu_1}{\sqrt{\frac{I_1}{A_1}}} = \frac{\mu_1 \mu_1}{\frac{d_1}{4}} = \frac{4\mu_1 \mu_1}{d_1}$$

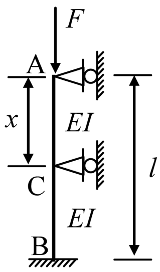
对 2 杆，
$$\lambda = \frac{\mu_2 \mu_2}{i_2} = \frac{\mu_2 \mu_2}{\sqrt{\frac{I_2}{A_1}}} = \frac{\mu_2 \mu_2}{\frac{d_2}{4}} = \frac{4\mu_2 \mu_2}{d_2}$$

故：
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2} = \frac{0.7 \times 2l}{2 \times l} = 0.7 \qquad \frac{F_{cr1}}{F_{cr2}} = \frac{\sigma_{cr1} \bullet A_1}{\sigma_{cr2} \bullet A_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 0.49$$

$\therefore F_{cr1} > F_{cr2}$，即 2 杆稳定性好些。

十六、图示压杆，AC、CB 两杆均为细长压杆，问 x 为多大时，承载能力最大？并求此时承载能力与 C 处

不加支撑时承载能力的比值。



解答：1）承载能力最大的条件是 AC 杆和 BC 杆同时达到临界力，且相同

即：
$$F_{\mathrm{cr}AC}=\frac{\pi^2 EI}{x^2}=F_{\mathrm{crBC}}=\frac{\pi^2 EI}{\left[0.7\left(l-x\right)\right]^2}$$

即：
$$x=0.7\left(l-x\right)$$
$$x=0.412l$$

2）对所承载的力与 C 处不加支撑是承载的力的比值

$$\frac{F_{crAC}}{F_{crAB}}=\frac{\dfrac{\pi^2 EI}{\left(0.412l\right)^2}}{\dfrac{\pi^2 EI}{\left(0.7l\right)^2}}=\frac{0.7^2}{0.412^2}=2.89$$

十七、校核两端固定矩形截面压杆的稳定性。已知 l＝3m，F＝100kN，b＝40mm，h＝60mm。材料的弹性模量 E＝200GPa，$\sigma_{\mathrm{p}}=196\mathrm{MPa}$，稳定安全因数 n_{st}＝3。

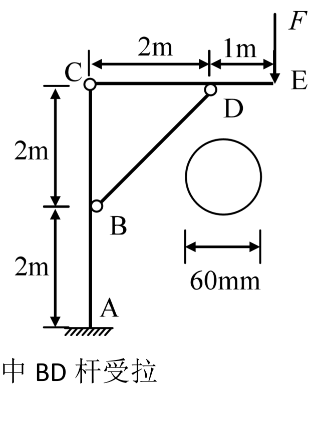
解答：
$$\because \lambda_p=\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=100,\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\mu l}{\sqrt{\dfrac{I}{A}}}=\frac{ul}{\dfrac{b}{\sqrt{12}}}=130>\lambda_p$$

$$\therefore F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2 EI}{\left(0.5l\right)^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9\times\dfrac{0.06\times 0.04^3}{12}}{\left(0.5\times 3\right)^2}=281kN$$

$$\because \frac{F_{cr}}{F}=\frac{281}{100}=2.81<n_{st}=3$$

故压杆不符合稳定条件。

十八、试确定图示结构中压杆 BD 失稳时的临界载荷 F 值。已知：E＝2×10^{5}MPa，$\sigma_p=200\mathrm{MPa}$。



解答：取研究对象，画受力图如图，其中 BD 杆受拉

$$\sum M_c=0$$

$F_{crBD} \bullet \sin 45^\circ \times 2 = F_{cr} \times 3$

$\therefore F_{cr} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} F_{crBD}$

对于 BD 杆，

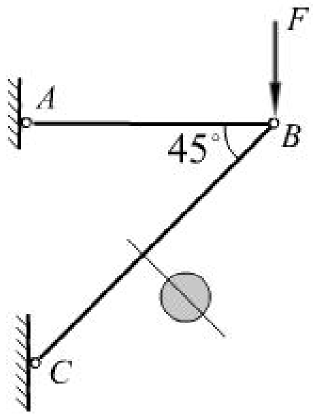
$\lambda_{BD} = \dfrac{\mu l}{i} = \dfrac{1 \times 2\sqrt{2}}{\dfrac{0.06}{4}} = 188.6 > \lambda_p = \pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\dfrac{2\times 10^5}{200}} = 99.3$

$\therefore F_{crBD} = \sigma_{crBD} \bullet A = \dfrac{\pi^2 EI}{{\lambda_{BD}}^2} \bullet A = \dfrac{\pi^2 \times 2 \times 10^{11} \times \dfrac{\pi \times 0.06^2}{4}}{188.6^2} = 157kN$

代入得：

$F_{cr} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \times 157 = 74kN$

十九、图示支架，斜杆 BC 为圆截面杆，直径 d = 45mm、长度 l =1.25m，材料为优质碳钢，比例极限 s_p =200MPa，弹性模量 E=200GPa。若$[n]_{st}$= 4，试按 BC 杆的稳定性确定支架的许可载荷$[F]$ 。



取节点B

$\sum F_y = 0$

$F_{BC} \cdot \sin 45^0 - F = 0,$

$F_{BC} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = F$

取CD杆

$$\lambda_P = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = 3.14 \times \sqrt{\frac{200\times 10^9}{200\times 10^6}} = 99.3$$

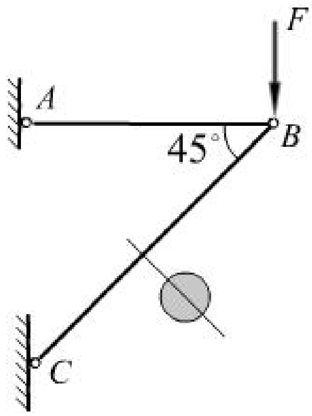
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{l}{\frac{d}{4}} = \frac{1.25 \times 4}{0.045} = 111.1 > \lambda_p$$

∴ 可以使用 Euler 公式

$$F_{BC-Cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^3 \times 200 \times 10^9 \times 0.045^4}{(1 \times 1.25)^2 \times 64} = 253.9 \text{ (kN)}$$

$$\therefore \quad [F] = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F_{BC-Cr}}{n_{st}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{253.9}{4} = 44.9 \text{(kN)}$$

二十、图示支架，斜杆 BC 为圆截面杆，直径 d = 45mm、长度 l =1.25m，材料为优质碳钢，比例极限 s_p =200MPa，弹性模量 E=200GPa。若[n]$_{st}$= 4，试按 BC 杆的稳定性确定支架的许可载荷$[F]$ 。



取节点B

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BC} \cdot \sin 45^0 - F = 0,$$

$$F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = F$$

取CD杆

$$\lambda_P = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = 3.14 \times \sqrt{\frac{200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$

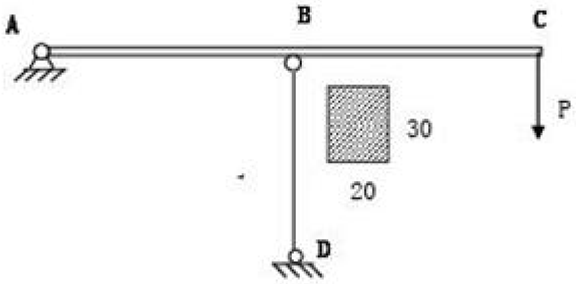
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{l}{\frac{d}{4}} = \frac{1.25 \times 4}{0.045} = 111.1 > \lambda_p$$

∴ 可以使用 Euler 公式

$$F_{BC-Cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^3 \times 200 \times 10^9 \times 0.045^4}{(1 \times 1.25)^2 \times 64} = 253.9 \text{ (kN)}$$

$$\therefore \quad [F] = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F_{BC-Cr}}{n_{st}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{253.9}{4} = 44.9 \text{(kN)}$$

二十一、刚性水平横梁 **ABC**，总长为 **2m**，承受集中荷载 **P** 的作用，在梁的中心 **B** 处用一 **20mm×30mm** 的矩形截面杆件 **BD** 支撑。**BD** 杆件材料的弹性模量 **E=200GPa**，比例极限为 $[\sigma_P]=200MPa$ 屈服极限 $[\sigma_S]=240MPa$ **,a=304MPa ,b=1.12MPa**。**BD=1m**;稳定安全系数 **n**$_{rt}$**=2**，根据压杆 **BD** 的稳定性确定性系统的许可荷载 **P**。



一、

（一）. 计算 F_{cr}

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1\times1000}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{12}\times30\times20^3}{30\times20}}}=\frac{1000}{\dfrac{20}{2\sqrt{3}}}=100\sqrt{3}$$

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_P}}=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}=100$$

$\lambda>\lambda_1$ 用欧拉公式计算

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^9\times\frac{1}{12}\times30\times20^3\times10^{-12}}{1^2}=39478.42N$$

（二）计算工作压力　$F_{BD}=2p$

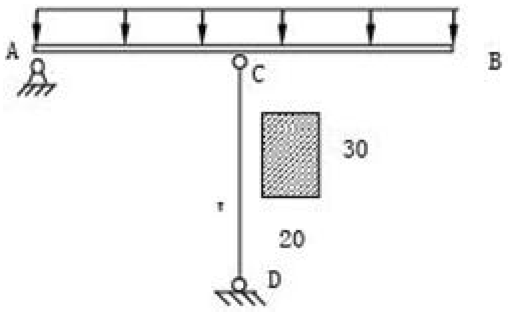
（三）　$\dfrac{F_{cr}}{F_{BD}}\ge n_{st}$

$$\frac{39478.42}{2p}\ge2$$

$$p\le9869.6N/m$$

二十二、刚性水平横梁 **AB**，总长为 **2m**，承受均布荷载 **q** 的作用，在梁的中心 **C** 处用一 **20mm×30mm** 的矩形截面杆件 **CD** 支撑。**CD** 杆件材料的弹性模量 **E=200GPa**，比例极限为 $\sigma_P=200MPa$ ，屈服极限

$\sigma_S=240MPa$ **,a=304MPa ,b=1.12MPa**。**CD=1m;**稳定安全系数 **n**$_{rt}$**=2**，根据压杆 **CD** 的稳定性确定性系统的许可荷载 **q**。



（一）. 计算 F_{cr}

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1\times1000}{\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\times30\times20^3}{30\times20}}}=\frac{1000}{\frac{20}{2\sqrt{3}}}=100\sqrt{3}$$

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_P}}=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}=100$$

$\lambda>\lambda_1$　　用欧拉公式计算

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^9\times\frac{1}{12}\times30\times20^3\times10^{-12}}{1^2}=39478.42N$$

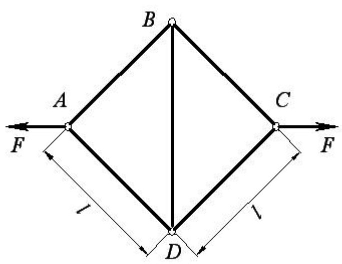
（二）计算工作压力

$$F_{BD}=2q$$

（三）　$\frac{F_{cr}}{F_{BD}}\geq2$

$$\frac{39478.42}{2q}\geq2$$
$$q\leq9859.6N/m$$

二十三、图示结构，各杆材料许用应力[σ]=120MPa；边杆长度 l=1m，直径 d_1=0.04m；对角线杆的直径 d=0.06m，稳定因数φ=0.527。试求该结构合理的允许载荷[F]。



解：

拉杆内力：$F_\mathrm{N}=\frac{F}{\sqrt{2}}$（2分）

拉杆强度：

$$\sigma=\frac{4F_\mathrm{N}}{\pi d_1{}^2}=\frac{4F}{\sqrt{2}\pi d_1{}^2}\leq[\sigma]$$

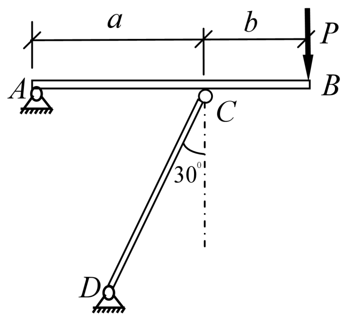
$$F\leq\frac{\sqrt{2}\pi d_1{}^2[\sigma]}{4}=213.3\,\mathrm{kN}$$

对角线杆压力：F（1 分）

杆稳定：
$$\sigma=\frac{4F}{\pi d^2}\le\varphi[\sigma]$$
$$F\le\frac{\pi d^2\varphi[\sigma]}{4}=178.8\,\mathrm{kN}$$

结论：$[F]=\min\{213.3,178.8\}=178.8\,\mathrm{kN}$

二十四、如图所示的结构中，各杆的重量不计，杆 AB 可视为刚性杆。已知 $a=100\mathrm{cm}$, $b=50\mathrm{cm}$，杆 CD 长 $L=2\mathrm{m}$，横截面为边长 $h=5\mathrm{cm}$ 的正方形，材料的弹性模量 $E=200\mathrm{GPa}$, 比例极限 $\sigma_P=200\mathrm{MPa}$，稳定安全系数 $n_{st}=3$。求结构的许可外力 $[P]$。



解

取 AB 杆

$$\sum m_A=0$$
$$F_C\times\cos30^\circ\times100-P\times150=0$$
$$F_C=\sqrt{3}P$$

取 CD 杆

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=3.14\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}}=99.3$$
$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\sqrt{3}\mu l}{h}=\frac{2\times1.732\times1\times2}{5\times10^{-2}}=138.6>\lambda_p$$

∴可以使用 Euler 公式

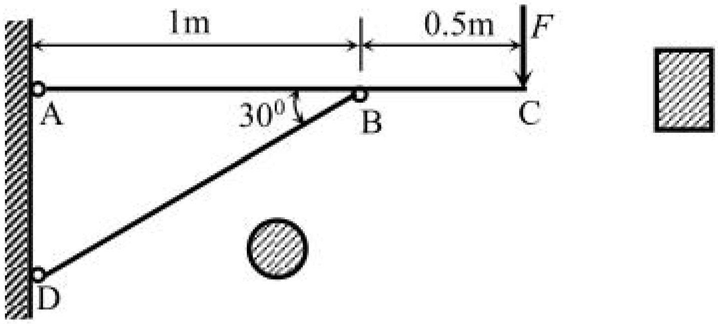
$$F_{Ccr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu L)^2}=\frac{3.14^2\times200\times10^9\times(5\times10^{-2})^4}{(1\times2)^2\times12}=256.8(\mathrm{kN})$$

由 $\dfrac{F_{Ccr}}{F_C}=n_{st}$

$$\therefore\quad F_C=\sqrt{3}P=\frac{F_{Ccr}}{n_{st}}$$
$$\therefore\quad [P]=\frac{F_{Ccr}}{\sqrt{3}n_{st}}=\frac{256.8}{3\sqrt{3}}=49.4(\mathrm{kN})$$

二十五、图示托架，其斜杆 BD 为直径 d=20mm 的圆截面杆，水平杆 AC 为 100mm×150mm 的矩形截面杆，已知两杆材料的弹性模 E=200GPa，材料的许用应力

$[\sigma]$=170MPa，材料柔度的界限值 λ_p =100，稳定安全系数 n_{st} =2.5，非细长压杆的临界应力公式为 σ_{cr} =240-0.00682 λ^2 (MPa)，荷载 F=50kN，试校核此结构的安全性。



解：1、校核 AC 杆件：B 截面左侧为危险截面

$$F_N = 129.9kN \quad M_{\max} = 25kN.m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{AC}} + \frac{F_N}{A_{AC}}$$
$$= \frac{25000\times 6}{0.1\times 0.15^2} + \frac{129900}{0.1\times 0.15}$$
$$= 73.5MPa < [\sigma]$$

2、校核 BD 杆件的稳定性

$$\lambda = \frac{\mu l_{BD}}{i_{BD}} = \frac{1\times(1000/\cos 30^0)}{60/4} = 76.98 < 100$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A_{BD} = (240 - 0.00682\times 76.98^2)\times\frac{\pi\times 60^2}{4} = 564.31kN$$

$$\frac{F_{cr}}{F_{BD}} = \frac{564.31}{150} = 3.76 > 2.5$$

满足强度和稳定条件

第二部分：混凝土结构设计原理

绪 论

一、填空题

1、素混凝土结构、钢筋混凝土结构、预应力混凝土结构；2.压应力 、拉应力；3.承载能力、延性；

二、选择题

1B; 2A; 3B; 4 A; 5 C

三、名词解释

混凝土结构：以混凝土为主制作的结构称为混凝土结构，包括素混凝土结构、钢筋混凝土结构、预应力混凝土结构等。

四、简答题

1.⑴混凝土结硬后与钢筋牢固地粘结在一起，能相互传递应力；⑵钢筋与混凝土有相近的线膨胀系数；⑶混凝土可以保护钢筋不被锈蚀。

2．钢筋混凝土结构的优点有：1）经济性好，材料性能得到合理利用；2）可模性好；3）耐久性和耐火性好，维护费用低；4）整体性好，且通过合适的配筋，可获得较好的延性；5）刚度大，阻尼大；6）就地取材。

缺点有：1）自重大；2）抗裂性差；3）承载力有限；4）施工复杂；5）加固困难。

第 1 章　混凝土结构用材料的性能

一、填空题

1．提高、延性、钢管或螺旋箍筋；2.原点弹性模量、切线模量、割线模量；3.边长 150mm；4.冷拉、拉拔、冷轧、冷轧扭、提高钢筋的强度；5.伸长率、冷弯性能；6.内在因素、环境因素、应力条件；7.水泥胶体对钢筋的粘着力、钢筋与混凝土之间的摩擦力、钢筋表面凹凸不平与混凝土的机械咬合作用。

二、选择题

1. A；2. D；3. D；4. C；5. D；6. D；7. A；8. B；9. C；10.A；11 B；12. D；13. A；14 A；15. C；16. C；17. A

三、名词解释

1. 徐变: 结构或材料承受的荷载或应力不变，而应变或变形随时间增长的现象称为徐变。

2. 混凝土强度等级: 混凝土的强度等级是根据立方体抗压强度标准值确定的。我国新《规范》规定的混凝土强度等级有 C15、C20、C25、C30、C35、C40、C45、C50、C55、C60、C65、C70、C75 和 C80，共 14 个等级。

3. 混凝土的立方体抗压强度标准值：混凝土的立方体抗压强度标准值 $f_{cu,k}$ 是根据以边长为 150mm 的立方体为标准试件，在(20±3)℃的温度和相对湿度为 90％以上的潮湿空气中养护 28d，按照标准试验方法测得的具有 95％保证率的立方体抗压强度确定的。

4. 混凝土的轴心抗压强度标准值：混凝土的轴心抗压强度标准值 f_{ck} 是根据以 150mm×150mm×300mm 的棱柱体为标准试件，在与立方体标准试件相同的养护条件下，按照棱柱体试件试验测得的具有 95％保证率的抗压强度确定的。

5. 粘结力：若钢筋和混凝土有相对变形（滑移），会在钢筋和混凝土交界面上，产生沿钢筋轴线方向的相互作用力，这种力称为钢筋和混凝土之间的粘结力。

四、简答题

1. 见教材 P16 图 1-12。

2. 徐变对混凝土结构和构件的工作性能有很大影响，它会使构件的变形增加，在钢筋混凝土截面中引起应力重分布的现象，在预应力混凝土结构中会造成预应力损失。

3．钢筋混凝土结构对钢筋性能的要求如下：1）钢筋的强度必须能保证安全使用；2）钢筋具有一定的塑性；3）钢筋的可焊性较好；4）钢筋与混凝土之间有足够的粘结力。

4. 影响钢筋与混凝土粘结强度的主要因素有：混凝土强度、保护层厚度及钢筋净间距、横向配筋及侧向压应力、钢筋表面形状以及浇筑混凝土时钢筋的位置等。保证钢筋和混凝土之间有足够的粘结力的构造措施有：1）对不同等级的混凝土和钢筋，要保证最小搭接长度和锚固长度；2）为了保证混凝土与钢筋之间有足够的粘结，必须满足钢筋最小间距和混凝土保护层最小厚度的要求；3）在钢筋的搭接接头范围内应加密箍筋；4）为了保证足够的粘结

在钢筋端部应设置弯钩。此外，对高度较大的混凝土构件应分层浇注或二次浇捣，另外，对于锈蚀钢筋，一般除重锈钢筋外，可不必除锈。

第 2 章　混凝土结构设计方法

一、填空题

1．结构可靠度；2. 极限状态；3.安全性、适用性、耐久性；4. 结构重要性系数、结构安全等级；5.适用性、安全性、耐久性；6. 50 年；7.永久性荷载、可变荷载、偶然荷载； 8.荷载标准值、可变荷载准永久值、可变荷载频遇值、可变荷载组合值；9.荷载标准值； 10.荷载标准值与荷载分项系数的乘积；11.承载能力极限状态、正常使用极限状态；12.可靠度分析、工程经验；13.结构重要性系数、荷载分项系数、材料的分项系数；14.1.0； 15.正常设计、正常施工、正常使用、正常维护

二、选择题

1. B；2. C；3. A；4. A；5. B；6. C；7. A；8. B；9. D；10.C；11 B；12. A；13. C；14 B；15. D；16. C；17. D ；18. D；19. C；20. C；21. D；22. A； 23. B；24. A；25. D；26. A

三、名词解释

1．作用: 凡能使结构产生内力、应力、位移、应变、 裂缝的因素，都称之为结构上的作用。

2．结构可靠度：指结构在规定时间内、规定条件下完成预定功能的概率，是结构可靠性的概率度量。

3. 结构可靠性：指结构在规定时间内、规定条件下完成预定功能的能力，是安全性、适用性、耐久性的总称。

4. 结构设计基准期：是为确定可变作用及与时间有关的材料性能取值而选用的时间参数，它不等同于设计使用年限。我国规定为 50 年。

5. 结构设计使用年限：设计规定的结构或结构构件不需进行大修即可按其预定目的使用的时期。规定的条件：即房屋建筑在正常设计、正常施工下、正常使用。设计使用年限是正常情况下建筑结构保持良好使用的年限，并不是结构的寿命年限。

6. 荷载标准值：是指结构在使用期间，在正常情况下可能出现的最大荷载值。由于最大荷载是随机变量，故荷载标准值原则上应根据荷载的设计基准期最大荷载概率分布的某一分位系数（使其保证率达到 95%）而确定的。 它是各种荷载在建筑结构设计时采用的荷载基本代表值。

7. 结构极限状态：整个结构或结构的一部分超过某一特定状态就不能满足设计指定的某一功能要求，这个特定的状态称之为该功能的极限状态。

8. 结构承载力极限状态：结构或构件达到最大承载力或达到不适于继续承载的变形时的极限状态。

9. 结构正常使用极限状态：结构或构件达到正常使用的某项规定限值时的极限状态。

10. 作用效应：结构上的作用使结构产生的内力（如弯矩、剪力、轴向力、扭矩等）、变形、裂缝等统称为作用效应或荷载效应。

11. 结构抗力：结构或构件承受作用效应的能力

四、简答题

1. 以力的形式直接作用于结构上，称为直接作用，以变形的形式作用于结构上，称为间接作用。

2. 结构的可靠性指结构的安全性、适用性、耐久性。结构的可靠度指结构在规定时间内、规定条件下完成预定功能的概率。结构的可靠度就是结构可靠性的概率度量。结构的可靠指标 $\beta = \mu_z/\sigma_z$，它和失效概率一样可作为衡量结构可靠度的一个指标。

3. 一般情况下总可以将影响结构可靠性的因素归结为结构的结构构件抗力 R 和表示荷载效应 S，$Z=R-S$ 就是结构的功能函数。整个结构或构件的一部分超过某一特定状态就不能满足设计指定的某一功能要求，这个特定状态就是该功能的极限状态。$Z>0$ 表示结构处于可靠状态；$Z<0$ 表示结构处于失效(破坏)状态；$Z=0$ 表示结构达到极限状态。
图示关系见教材 P40 图 2-6。

4. 分为三类：
（1）恒荷载（永久荷载）：在结构使用期间，其值不随时间变化或变化与其平均值相比可乎略。如：结构自重、装修层重、土压力、预应力等。
（2）活荷载（可变荷载）：在结构使用期间，其值随时间变化，且变化与平均值相比不能忽略。例如：楼面活荷载，屋面活载、雪载、风载、吊车荷载等。
（3）偶然荷载：在结构使用期间不一定出现，一旦出现，其值很大且持续时间很短的荷载。如地震、爆炸力、撞击。

5. 荷载标准值各种荷载在建筑结构设计时采用的荷载基本代表值，其它代表值都是以它为依据计算得出的。包括：
（1）恒荷载标准值 G_k：结构或构件自重、装修重等（查荷载规范，给出了各种材料容重）。
（2）活荷载标准值 Q_k：楼面活荷载、屋面活荷载、屋面积灰荷载、雪荷载、风荷载、吊车荷载等。

6. 当两种或两种以上可变荷在结构上同时作用时，由于所有荷载同时达到其单独出现时可能达到最大值的概率极小，因此，除主要荷载（产生最大荷载效应的荷载）仍可以其标准值为代表值外，其他伴随荷载均应取小于其标准值的组合值为荷载代表值。

7. 应根据结构破坏可能产生的各种后果（生命安全、经济损失、社会影响）的严重性，对不同建筑结构采用不同的安全等级。我国规定为三级，如教材表 2-2（P27）所示。

8. 结构设计以材料性能标准值、几何参数标准值以及荷载代表值为基本参量。但是，对应于不同的极限状态和不同的设计情况，要求的结构可靠度并不相同。在各类极限状态的表达式中，引入了材料性能分项系数和荷载分项系数等多个分项系数来反映不同情况下的可靠度要求。因此，分项系数是用极限状态设计时，为了保证所设计的结构或构件具有规定的可靠度，而在计算模式中采用的系数。

9. 由荷载的分项系数乘以荷载的标准值，称恒载的设计值；由荷载的设计值与荷载效应系数的乘积则称为荷载效应设计值，即内力设计值。

10. 考虑了（1）结构重要性系数；（2）荷载分项系数；（3）材料的分项系数。

11. 包括延性破坏和脆性破坏两种。当结构构件属延性破坏时，由于破坏之前有明显的变形

或其他的预兆，目标可靠指标要取略小一些；而当结构构件属脆性破坏时，因脆性破坏比较突然，破坏前无明显的变形或其他的预兆，目标可靠指标应取大一些。

12. ① 结构构件或连接因所受应力超过材料强度而破坏，或因过度变形而不适于继续承载；

② 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡（如倾覆等）；

③ 结构转变为机动体系；

④ 结构或结构构件丧失稳定（如压屈等）；

⑤ 结构因局部破坏而发生连续倒塌（如初始的局部破坏，从构件到构件扩展，最终导致整个结构倒塌）；

⑥ 地基丧失承载能力而破坏（如失稳等）；

⑦ 结构或结构构件的疲劳破坏（如由于荷载多次重复作用而破坏）。

13. ① 影响正常使用或外观的变形，如吊车梁变形过大使吊车不能平稳行驶，梁挠度过大影响外观；

② 影响正常使用或耐久性能的局部损坏（包括裂缝），如水池开裂漏水不能正常使用，梁裂缝过宽致使钢筋锈蚀；

③ 影响正常使用的振动，如因机器振动而导致结构的振幅超过按正常使用要求所规定的限值；

④ 影响正常使用的其他特定状态，如相对沉降量过大等。

五、计算题

1.【解】取 1m 板宽作为计算单元

荷载计算：

（1）恒荷载线荷载标准值：

水磨石地面面层重：0.65×1.0=0.65 kN/ m

钢筋混凝土现浇板的自重：25×0.1×1.0=2.5 kN/ m

板底混合砂浆抹灰 15mm 厚：17×0.015×1.0=0.255 kN/ m

合计：G_k=3.405 kN/ m

（2）活荷载标准值：Q_k=2.5×1.0=2.5 kN/ m

线荷载标准值为：

（3）荷载设计值计算：

① 由可变荷载效应控制的组合：

q=1.2 G_k+1.4 Q_k=7.59 kN/ m

②由恒荷载效应控制的组合：

q=1.35 G_k+1.4×0.7Q_k=7.05 kN/ m

则取荷载设计值为： P =7.59 kN/ m

内力计算（弯矩计算）：

$$M=\frac{1}{8}ql^2=\frac{1}{8}\times 7.59\times 2.66^2=6.71\text{kN}\cdot\text{m}$$

2.【解】（1）承载能力极限状态

可变荷载效应控制的组合:

M＝1.0（1.2×3.1×3.18×3.18/8＋1.4×1.35×3.18×3.18/8）＝7.07kN·m

永久荷载效应控制的组合：

M＝1.0（1.35×3.1×3.18×3.18/8＋1.4×0.7×1.35×3.18×3.18/8）＝6.96 kN·m

所以，承载能力极限状态计算时弯矩设计值为 7.07 kNm

（2）正常使用极限状态

按标准组合计算

M＝3.1×3.18×3.18/8＋1.35×3.18×3.18/8＝5.61 kN·m

按准永久组合计算

M＝3.1×3.18×3.18/8＋0.4×1.35×3.18×3.18/8＝4.59 kN·m

由于在承载能力极限状态计算时，计算荷载效应的公式可能相同，所以，可以先计算出一个荷载值，然后依据这个荷载值一次计算出荷载效应。

如上例，将 1.2×3.1＋1.4×1.35＝5.61 和 1.35×3.1＋1.4×0.7×1.35＝5.508 取大者，得到 q＝5.61，由 5.61×3.18×3.18/8＝7.07，计算相对简化。

在这里的 5.61 可以被称作荷载的设计值（考虑了分项系数之后的荷载值）。

第 3 章　钢筋混凝土轴心受力构件正截面承载力计算

一、填空题

1．普通箍筋柱、螺旋箍筋柱；2．螺旋箍筋限制了核心混凝土的横向变形、承载力、延性；3．受压、失稳、混凝土被压缩、高于、稳定系数φ；4．混凝土强度等级、环境类别、构件类型、设计使用年限；

二、选择题

1. D；2. A；3. A；4. B；5. D；6. C；7. B；8. D；9. C；10.C；11 A；12. D；13. C；14. B

三、简答题

1. 纵向受力钢筋一般采用 HRB400 级、HRB335 级和 RRB400 级，不宜采用高强度钢筋，因为与混凝土共同受压时，不能充分发挥其高强度的作用。混凝土破坏时的压应变 0.002，此时相应的纵筋应力值 $\sigma_s{}'=E_s\varepsilon_s{}'=200\times10^3\times0.002=400\ N/mm^2$；若钢筋强度过高，不能充分发挥作用。

2. 纵筋的作用：①与混凝土共同承受压力，提高构件与截面受压承载力；②提高构件的变形能力，改善受压破坏的脆性；③承受可能产生的偏心弯矩、混凝土收缩及温度变化引起的拉应力；④减少混凝土的徐变变形。

横向箍筋的作用：①防止纵向钢筋受力后压屈和固定纵向钢筋位置；②改善构件破坏的脆性；③当采用密排箍筋时还能约束核芯内混凝土，提高其强度和极限变形值。

3. 当柱子在荷载长期持续作用下，使混凝土发生徐变而引起应力重分布。此时，如果构件在持续荷载过程中突然卸载，则混凝土只能恢复其全部压缩变形中的弹性变形部分，其徐变变形大部分不能恢复，而钢筋将能恢复其全部压缩变形，这就引起二者之间变形的差异。当构件中纵向钢筋的配筋率愈高，混凝土的徐变较大时，二者变形的差异也愈大。此时由于钢筋的弹性恢复，有可能使混凝土内的应力达到抗拉强度而立即断裂，产生脆性破坏。

4. 凡属下列条件的，不能按螺旋筋柱正截面受压承载力计算：

① 当 $l_0/b>12$ 时，此时因长细比较大，有可能因纵向弯曲引起螺旋箍筋不起作用；

② 如果因混凝土保护层退出工作引起构件承载力降低的幅度大于因核芯混凝土强度提高而使构件承载力增加的幅度，

③ 当间接钢筋换算截面面积 A_{ss0} 小于纵筋全部截面面积的 25%时，可以认为间接钢筋配置得过少，套箍作用的效果不明显。

5. 第Ⅰ阶段——加载到开裂前

此阶段钢筋和混凝土共同工作，应力与应变大致成正比。在这一阶段末，混凝土拉应变达到极限拉应变，裂缝即将产生。

第Ⅱ阶段——混凝土开裂后至钢筋屈服前

裂缝产生后，混凝土不再承受拉力，所有的拉力均由钢筋来承担，这种应力间的调整称为截面上的应力重分布。第Ⅱ阶段是构件的正常使用阶段，此时构件受到的使用荷载大约为

构件破坏时荷载的 50%—70%，构件的裂缝宽度和变形的验算是以此阶段为依据的。
第 III阶段——钢筋屈服到构件破坏

当加载达到某点时，某一截面处的个别钢筋首先达到屈服，裂缝迅速发展，这时荷载稍稍增加，甚至不增加都会导致截面上的钢筋全部达到屈服（即荷载达到屈服荷载 N_y 时）。评判轴心受拉破坏的标准并不是构件拉断，而是钢筋屈服。正截面强度计算是以此阶段为依据的。

6． 轴心受压构件在加载后荷载维持不变的条件下，由于混凝土徐变，则随着荷载作用时间的增加，混凝土的压应力逐渐变小，钢筋的压应力逐渐变大，一开始变化较快，经过一定时间后趋于稳定。在荷载突然卸载时，构件回弹，由于混凝土徐变变形的大部分不可恢复，故当荷载为零时，会使柱中钢筋受压而混凝土受拉。若柱的配筋率过大，还可能将混凝土拉裂，若柱中纵筋和混凝土之间有很强粘应力时，则能同时产生纵向裂缝，这种裂缝更为危险。这了防止出现这种情况，故要控制柱中纵筋的配筋率，要求全部纵筋配筋率不宜超过 5%。

四、计算题

1.解：根据构造要求，先假定柱截面尺寸为 400mm×400mm
由 $l_0/b=3600/400=9$ ，查表得 $\varphi=0.99$

根据轴心受压承载力公式确定 A_s'

$$A_s' ==\frac{1}{f_y'}(\frac{N}{0.9\varphi}-f_cA)=\frac{1}{360}(\frac{2650\times10^3}{0.9\times0.99}-14.3\times400\times400)=1906mm^2$$

$$\rho'=\frac{A_s'}{A}=\frac{1906}{400\times400}=1.2\%>\rho'_{\min}=0.6\%$$ ，

对称配筋截面每一侧配筋率也满足 0.2%的构造要求。

选 4C25, $A_s'=1964mm^2$

2.解： （1）求 φ

则 $\frac{l_0}{b}=\frac{4200}{300}=14.0$，由表得 $\varphi=0.92$

（2）求 N_u

$$N_u=0.9\varphi(f_cA+f_y'A_s')=0.9\times0.92(14.3\times300\times300+300\times804)$$
$$=1265\text{kN}>900\text{kN}(\textbf{满足要求})$$

3. 解： 配筋率验算：
$$\rho'=\frac{A_s'}{A}=\frac{7854}{0.25\times3.14\times470^2}=4.5\%\begin{cases}>\rho'_{\min}=0.55\% \\ <5\% \quad \textbf{满足最大配筋率} \\ >3\% \quad \textbf{需要扣除钢筋面积}\end{cases}$$ ，

也满足单侧最小配筋率。
由 $l_0/d=5200/470=11.06<12$ ，查表得 $\varphi=0.938$ ，可以采用螺旋箍筋计算抗压承载力。按螺旋箍筋柱计算承载力：

$d_{\mathrm{cor}}=470-2\times(10+20)=410\mathrm{mm}$

$A_{\mathrm{cor}}=0.25\pi d_{cor}^2=0.25\times3.14\times410^2=132000\mathrm{mm}^2$

$A_{\mathrm{ss0}}=\dfrac{\pi d_{\mathrm{cor}}A_{\mathrm{ss1}}}{s}=\dfrac{3.14\times410\times78.5}{40}=2517\mathrm{mm}^2>0.25A_s'$，满足构造要求。

$N_{\mathrm{u}}=0.9(f_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{cor}}+2\alpha f_{\mathrm{y}}A_{\mathrm{ss0}}+f_{\mathrm{y}}'A_{\mathrm{s}}')=0.9(19.1\times132000+2\times1\times270\times2527+360\times7854)=6042\mathrm{kN}$

满足要求。

按普通箍筋柱验算承载力：

$N_{\mathrm{u1}}=0.9\varphi(f_{\mathrm{c}}A+f_{\mathrm{y}}'A_{\mathrm{s}}')=0.9\times0.938\times(19.1\times(0.25\times3.14\times470^2-7854)+360\times7854)=5056\mathrm{kN}$

$1.5N_{u1}=7584\mathrm{kN}>N_u$　满足要求。

第 4 章　钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算

一、填空题

1. 适筋梁、超筋梁、适筋梁、少筋梁；2. 在翼缘内；3. $\alpha_1 f_c b_f' h_f' \geq M$、$f_y A_s \leq \alpha_1 f_c b_f' h_f'$；4. 界限相对受压区高度、$\xi > \xi_b$；5. 少筋破坏、适筋破坏、超筋破坏、少筋破坏、超筋破坏、适筋破坏；6. 钢筋强度、混凝土强度；7. 受压钢筋屈服；8. 受压钢筋的合力作用点；9.混凝土压应力合力大小相等、合力作用点位置不变；10、未裂阶段、带裂缝工作、破坏阶段、带裂缝工作、破坏阶段、未裂阶段；11、抗裂计算、裂缝宽度及变形验算、正截面受弯承载力；12、矩形、T 形；13、充分利用混凝土的受压区对正截面抗弯承载力的贡献； 14、$x = \xi_b h_0$、$M = \alpha_1 f_c b \xi_b h_0^2 (1 - 0.5\xi_b)$； 15、2

二、选择题

1. C；2. A；3. D；4. B；5. C；6. A；7. C；8. D；9. C；10.A；11 C；12. A；13. C；14. D；15.B；16. D; 17.C；18.A；19.D；20.C；21.B；22.C；23.A；

三、名词解释

1. 相对界限受压区高度：相对界限受压区高度 ξ_b 是适筋构件与超筋构件相对受压区高度的界限值，是受拉钢筋和受压区混凝土同时达到其强度设计值时的混凝土受压区高度与截面有效高度的比值，需要根据截面平面变形等假定求出。

2. 正截面受弯界限破坏：梁的受拉钢筋应力达到屈服应力的同时，压区混凝土被压碎，界限破坏属于延性破坏。

3. 正截面受弯梁最小配筋率 $\rho_{\min}$：$\rho_{\min} = \dfrac{A_s}{bh}$，确定原则是 $\mathrm{III_a}$ 计算钢筋混凝土梁的受弯构件正截面承载力与素混凝土受弯构件计算的正截面受弯承载力相等。因后者计算时，梁尚未开裂，故取 h 而非 h_0。

4. 正截面受弯梁纵向钢筋配筋率 ρ：$\rho = \dfrac{A_s}{bh_0}$，即纵向受拉钢筋截面面积与正截面有效面积 bh_0 的比值。h_0 是受拉钢筋合力作用点至截面受压区边缘的距离。

四、简答题

1. 适筋受弯构件正截面工作分为三个阶段。

第Ⅰ阶段荷载较小，梁基本上处于弹性工作阶段，随着荷载增加，弯矩加大，拉区边缘纤维混凝土表现出一定塑性性质。

第Ⅱ阶段弯矩超过开裂弯矩 M_{cr}，梁出现裂缝，裂缝截面的混凝土退出工作，拉力由纵向受拉钢筋承担，随着弯矩的增加，受压区混凝土也表现出塑性性质，当梁处于第Ⅱ阶段末 $\mathrm{II_a}$ 时，受拉钢筋开始屈服。

第Ⅲ阶段钢筋屈服后，梁的刚度迅速下降，挠度急剧增大，中和轴不断上升，受压区高度不断减小。受拉钢筋应力不再增加，经过一个塑性转动构成，压区混凝土被压碎，构件丧失承载力。

第Ⅰ阶段末的极限状态可作为其抗裂度计算的依据。

第Ⅱ阶段可作为构件在使用阶段裂缝宽度和挠度计算的依据。

第Ⅲ阶段末的极限状态可作为受弯构件正截面承载能力计算的依据。

2．钢筋混凝土受弯构件正截面有适筋破坏、超筋破坏、少筋破坏。

梁配筋适中会发生适筋破坏。受拉钢筋首先屈服，钢筋应力保持不变而产生显著的塑性伸长，受压区边缘混凝土的应变达到极限压应变，混凝土压碎，构件破坏。梁破坏前，挠度较大，产生较大的塑性变形，有明显的破坏预兆，属于塑性破坏。

梁配筋过多会发生超筋破坏。破坏时压区混凝土被压坏，而拉区钢筋应力尚未达到屈服强度。破坏前梁的挠度及截面曲率曲线没有明显的转折点，拉区的裂缝宽度较小，破坏是突然的，没有明显预兆，属于脆性破坏，称为超筋破坏。

梁配筋过少会发生少筋破坏。拉区混凝土一旦开裂，受拉钢筋即达到屈服，并迅速经历整个流幅而进入强化阶段，梁即断裂，破坏很突然，无明显预兆，故属于脆性破坏。

3．最小配筋率是指，当梁的配筋率ρ很小，梁拉区开裂后，钢筋应力趋近于屈服强度，这时的配筋率称为最小配筋率$\rho_{\min}$。是根据M_u=M_{cr}时确定最小配筋率。

控制最小配筋率是防止构件发生少筋破坏，少筋破坏是脆性破坏，设计时应当避免。

4. 单筋矩形受弯构件正截面承载力计算的基本假定是（1）平截面假定；（2）混凝土应力—应变关系曲线的规定；（3）钢筋应力—应变关系的规定；（4）不考虑混凝土抗拉强度，钢筋拉伸应变值不超过 0.01。以上规定的作用是确定钢筋、混凝土在承载力极限状态下的受力状态，并作适当简化，从而可以确定承载力的平衡方程或表达式。

5. 在单筋截面受压区配置受力钢筋后便构成双筋截面。

双筋截面一般不经济，但下列情况可以采用：（1）弯矩较大，且截面高度受到限制，而采用单筋截面将引起超筋；（2）同一截面内受变号弯矩作用；（3）由于某种原因（延性、构造），受压区已配置$A_s^{'}$；（4）为了提高构件抗震性能或减少结构在长期荷载下的变形。

6. 双筋矩形截面受弯构件正截面承载力的两个基本公式：

$$\alpha_1 f_c bx + f_y^{'} A_s^{'} = f_y A_s$$

$$M \le M_u = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + f_y^{'} A_s^{'}\left(h_0 - a_s^{'}\right)$$

适用条件：（1）$\xi \le \xi_b$（2）为了使受压钢筋能达到抗压强度设计值，应满足$x \ge 2a_s'$

7．为了使受压钢筋能达到抗压强度设计值，应满足$x \ge 2a_s'$， 其含义为受压钢筋位置不低于受压应力矩形图形的重心。当不满足条件时，则表明受压钢筋的位置离中和轴太近，受压钢筋的应变太小，以致其应力达不到抗压强度设计值。

此时对受压钢筋取矩：$M_u = f_y A_s (h_0 - a_s^{'}) + \alpha_1 f_c bx(a_s^{'} - \frac{x}{2})$

$x < 2a_s'$ 时，公式中的右边第二项相对很小，可忽略不计，近似取$x = 2a_s'$，即近似认为受压混凝土合力点与受压钢筋合力点重合，从而使受压区混凝土合力对受压钢筋合力点所产生的力矩等于零，因此

$$A_s = \frac{M}{f_y\left(h_0 - a_s^{'}\right)}$$

8. 第二类型 T 形截面：（中和轴在腹板内）

$$\alpha_1 f_c (b_f^{'} - b) h_f^{'} + \alpha_1 f_c b x = f_y A_s$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b x (h_0 - \frac{x}{2}) + \alpha_1 f_c (b_f^{'} - b) h_f^{'} (h_0 - \frac{h_f^{'}}{2})$$

适用条件：$\xi \le \xi_b$

规定适用条件是为了避免超筋破坏，而少筋破坏一般不会发生。

9．最小配筋率从理论上是由 M_u=M_{cr} 确定的，主要取决于受拉区的形状，所以计算 T 形截面的最小配筋率时，用梁肋宽度 b 而不用受压翼缘宽度 b_f 。

五、计算题

1.解：（1）判断是否需要布置成双筋

先按单筋截面计算受弯承载力，并假定受拉钢筋放两排：

h_0＝h-a_s＝500－65＝435mm

可承受的最大弯矩为

$M_u = \xi_b(1-0.5\xi_b)\alpha_1 f_c b h_0^2$＝0.550（1－0.5×0.550）×9.6×200×435^2

＝144.87×10^6 Nmm<M＝218kN·m

可见，需要设计成双筋梁。

（2）计算所需钢筋

取 $x = \xi_b h_0$，此时，

$$A_s^{'} = \frac{M - \xi_b(1-0.5\xi_b)\alpha_1 f_c b h_0^2}{f_y^{'}(h_0 - a_s^{'})} = \frac{218\times10^6 - 144.87\times10^6}{300\times(435-40)} = 617\text{mm}^2$$

$$A_s = \frac{\alpha_1 f_c b \xi_b h_0 + f_y^{'} A_s^{'}}{f_y} = \frac{9.6\times200\times0.55\times435 + 300\times617}{300} = 2148\ \text{mm}^2$$

（3）验算最小配筋率

由于配置双筋梁时，受拉钢筋通常都很大，所以，可不必验算最小配筋率。

对于单筋梁的情况，则需要验算。

最小配筋率取 $0.45\frac{f_t}{f_y}$ 和 0.2％的较大者，验算公式为：$A_s \ge \rho_{\min} b h$

2. 解：$x = h_0 - \sqrt{h_0^2 - \frac{2[M - f_y^{'} A_s^{'}(h_0 - a_s^{'})]}{\alpha_1 f_c b}}$

$=435-\sqrt{435^2-\dfrac{2\times[218\times10^6-300\times942\times(435-40)]}{1.0\times9.6\times200}}$＝155mm

满足 $x\le\xi_b h_0$＝0.55×435＝242mm，且 $x\ge 2a_s^{'}$＝80mm 的要求，故

$$A_s=\frac{\alpha_1 f_c bx+f_y^{'}A_s^{'}}{f_y}=\frac{9.6\times200\times155+300\times942}{300}=1936\text{mm}^2$$

由于配置双筋梁时，受拉钢筋通常都很大，所以，不必验算最小配筋率。

3.解：h_0＝h- a_s＝550－62.5＝487.5mm

混凝土受压区高度

$x=\dfrac{f_y A_s-f_y^{'}A_s^{'}}{\alpha_1 f_c b}=\dfrac{300\times3927-300\times942}{11.9\times250}$＝301mm>$\xi_b h_0$＝0.55×487.5＝242mm

表明受拉钢筋偏多，破坏时其应力未达到屈服。取 x＝$\xi_b h_0$，于是

$M_u=\xi_b(1-0.5\xi_b)\alpha_1 f_c bh_0^2+f_y^{'}A_s^{'}(h_0-a_s^{'})$

＝0.55（1－0.5×0.55）×11.9×250×487.5^2＋300×842（487.5－35）

＝409.8×10^6 N·mm>M＝409.8kN·m

故，截面安全。

4.解：（1）判断 T 形截面的类型

假定受拉钢筋为 1 排，a_s＝40mm

h_0＝h－ a_s＝450－40＝410mm

$\alpha_1 f_c\, h_f^{'}\, b_f^{'}(h_0-h_f^{'}/2)$＝11.9×2000×70×（410－70/2）=624.8×10^6 N·mm>115kN·m

所以，属于第一类 T 形截面。

$x=h_0-\sqrt{h_0^2-\dfrac{2M}{\alpha_1 f_c b_f^{'}}}=410-\sqrt{410^2-\dfrac{2\times115\times10^6}{11.9\times2000}}$＝12.0mm

$A_s=\dfrac{\alpha_1 f_c b_f^{'}x}{f_y}=\dfrac{11.9\times2000\times12.0}{300}$＝936mm^2

由于是单筋梁，需要验算最小配筋率。

$0.45\dfrac{f_t}{f_y}$＝0.45×1.27/300=0.19%<0.2%，故 ρ_{min}＝0.2％。

今 A_s=936mm^2> $\rho_{min}bh$＝0.2％×200×450＝180mm^2，满足要求。

5.解：（1）判断 T 形截面的类型

$f_y A_s$＝300×2454＝736200N

$\alpha_1 f_c b_f^{'}h_f^{'}$＝11.9×500×120＝714000N < $f_y A_s$

故属于第二类 T 形截面

$$a_s=\frac{3\times491\times(25+25/2)+2\times491\times(25+25+25+25/2)}{5\times491}$$ ＝57.5mm

h_0＝h－a_s＝500－57.5＝442.5mm

$$x=\frac{f_y A_s-\alpha_1 f_c(b_f^{'}-b)}{\alpha_1 f_c b}=\frac{300\times2454-11.9\times(500-200)\times120}{11.9\times200}$$ ＝129.3mm

<$\xi_b h_0$＝0.55×442.5＝243.4mm

满足公式适用条件。

若计算出的 $x>\xi_b h_0$，则需要取 $x=\xi_b h_0$，然后代入公式求解。

$$M_u=\alpha_1 f_c bx(h_0-x/2)+\alpha_1 f_c(b_f^{'}-b)h_f^{'}(h_0-h_f^{'}/2)$$

＝11.9×200×129.3（442.5-129.3/2）+11.9×200×（500-200）（442.5-120/2）

＝280.14×10^6 N·mm

此截面可以承受的弯矩设计值为 280.14kN·m

第 5 章　钢筋混凝土受弯构件斜截面承载力计算

一、填空题

1. 斜拉破坏、斜压破坏、剪压破坏、斜拉破坏、斜压破坏、剪压破坏；2.箍筋、弯起钢筋；3. 箍筋；4. 斜截面抗剪、斜截面抗弯、计算、构造措施；5. 斜截面抗弯承载力足够、正截面抗弯承载力足够；6.支座截面或节点边缘、总剪力的 75%； 7、正截面破坏、斜截面破坏；8、最大弯矩值处的截面（一般跨中）；支座附近(该处剪力较大)、正截面、斜截面；9、剪力；

二、选择题

1. B；2. A；3. C；4. B；5. C；6. D；7. A；8. C；9. A；10.A；11 A；12. C；13. D；14. D；15. B；16. B；17.C；18.D

三、名词解释

1、剪跨比λ：剪跨比λ指的是构件截面弯矩 M 与剪力 V 和有效高度乘积 h_0 的比值，是一个无量纲的参数。

2、配箍率：$\rho=\frac{A_{sv}}{bs}$，指沿梁长，在箍筋的一个间距范围内，箍筋各肢的全部截面面积与混凝土水平截面面积的比值。

3、材料抵抗弯矩图：根据梁的实际配筋画出的反映梁各正截面所能抵抗弯矩大小的材料图形。

4、延伸长度：从不需要该钢筋的截面起到截断点的距离，保证斜截面抗弯。

5、伸出长度：从该钢筋的充分利用点起到截断点的距离，保证有足够的锚固长度。

四、简答题

1.（1）斜截面破坏形态有三类：斜压破坏，剪压破坏，斜拉破坏（2）斜压破坏通过限制最小截面尺寸来控制；剪压破坏通过抗剪承载力计算来控制；斜拉破坏通过限制最小配箍率来控制；

2.（1）剪跨比的影响，随着剪跨比的增加，抗剪承载力逐渐降低；（2）混凝土的抗压强度的影响，当剪跨比一定时，随着混凝土强度的提高，抗剪承载力增加；（3）纵筋配筋率的影响，随着纵筋配筋率的增加，抗剪承载力略有增加； （4）箍筋的配箍率及箍筋强度的影响，随着箍筋的配箍率及箍筋强度的增加，抗剪承载力增加；（5）斜裂缝的骨料咬合力和钢筋的销栓作用；（6）加载方式的影响；（7）截面尺寸和形状的影响；

3.斜截面抗剪承载力基本公式的建立是以剪压破坏为依据的，所以规定上、下限来避免斜压破坏和斜拉破坏。

4．位于负弯矩区的纵向受拉钢筋允许截断。截断时，应满足自钢筋充分利用截面和理论截断点向外延伸一段规范规定的距离。

5. 对于钢筋混凝土梁，由于混凝土的抗拉强度很低，因此随着荷载的增加，当主拉应力值超过混凝土抗拉强度时，将首先在达到该强度的部位产生裂缝，其裂缝走向与主拉应力的方向垂直，故称为斜裂缝。斜裂缝的出现和发展使梁内应力的分布和数值发生变化，最终导致在剪力较大的近支座区段内不同部位的混凝土被压碎或混凝土拉坏而丧失承载力，即发生斜截面破坏。它发生在梁的剪力和弯矩共同作用的剪弯区段内。

6.(1)为避免发生斜压破坏，设计时，箍筋的用量不能太多，也就是必须对构件的截面尺寸加以验算，控制截面尺寸不能太小。

(2)为避免发生斜拉破坏，设计时，对有腹筋梁，箍筋的用量不能太少，即箍筋的配箍率必须不小于规定的最小配箍率；对无腹筋板，则必须用专门公式加以验算。

7. 支座边缘处截面；受拉钢筋弯起点处截面；箍筋间距或截面面积改变处截面；腹板宽度改变处剪力。

五、计算题

1.解：（1）验算截面尺寸

今 $\frac{h_w}{b}$ =（600-35）/250=2.26<4

$$0.25\beta_c f_c bh_0 = 0.25\times1.0\times11.9\times250\times565 = 420\times10^3\text{N} > V = 150\text{kN}$$

截面尺寸满足要求。

（2）判断是否只需要构造配筋

$$0.7 f_t bh_0 = 0.7\times1.27\times250\times560 = 124.5\times10^3\text{N} < V = 150\text{kN}$$

应该按照计算配置箍筋。

（3）计算箍筋间距

$$\frac{nA_{sv1}}{s} = \frac{V - 0.7 f_t bh_0}{f_{yv} h_0} = \frac{150\times10^3 - 124.5\times10^3}{270\times560} = 0.161\ \text{mm}^2/\text{mm}$$

选双肢箍，直径为 8mm，nA_{sv1}＝2×50.3＝100.6 mm²

则，s≤100.6/0.165=610mm

（4）验算最小配箍率

$$\rho_{sv,\min} = 0.24\frac{f_t}{f_{yv}} = 0.24\times1.27/270 = 0.113\%$$

今 $\rho_{sv} = \frac{A_{sv}}{bs}$ ＝100.6/(250×250)=0.161％，大于最小配箍率。

故满足要求。

2. 解：（1）验算截面尺寸

$$h_w = h_0 = 460mm, \frac{h_w}{b} = \frac{460}{250} = 1.84 < 4$$

属厚腹梁，混凝土强度等级为 C20，f_{cuk}=20N/mm²<50 N/mm² 故 β_c=1

$$0.25\beta_c f_c bh_0 = 0.25\times1\times9.6\times250\times460 = 276000\,\text{N} > V_{\max} = 180000\,\text{N}$$

截面符合要求。

（2）验算是否需要计算配置箍筋

$0.7f_t bh_0 = 0.7\times1.1\times250\times460 = 88550\,\mathrm{N} < V_{\max}(=180000\,\mathrm{N})$, 故需要进行配箍计算。

（3）只配箍筋而不用弯起钢筋

$$V = 0.7f_t bh_0 + f_{yv}\cdot\frac{nA_{sv1}}{s}\cdot h_0$$

则 $\frac{nA_{sv1}}{s} = 0.736mm^2/mm$

若选用Φ8@120 ，实有

$$\frac{nA_{sv1}}{s} = \frac{2\times50.3}{120} = 0.838 > 0.741(\text{可以})$$

配箍率 $\rho_{sv} = \frac{nA_{sv1}}{bs} = \frac{2\times50.3}{250\times120} = 0.335\%$

最小配箍率 $\rho_{sv\min} = 0.24\frac{f_t}{f_{yv}} = 0.24\times\frac{1.1}{270} = 0.098\% < \rho_{sv}(\text{可以})$

3.解：（1）验算最小配箍率

$\rho_{\mathrm{sv,min}} = 0.24\frac{f_t}{f_{yv}}$ ＝0.24×1.10/270=0.098%

今 $\rho_{\mathrm{sv}} = \frac{A_{sv}}{bs}$ ＝（2×28.3）/(200×200)=0.142％，大于最小配箍率。

（2）计算抗剪承载力

$h_{\mathrm{w}} = h_0 = h - a_s$ =400-40=360mm

$\lambda = \frac{a}{h_0} = \frac{1600}{360} = 4.44$ >3，取 $\lambda = 3$

$V = \frac{1.75}{\lambda+1}f_{\mathrm{t}}bh_0 + f_{\mathrm{yv}}\frac{nA_{\mathrm{sv1}}}{s}h_0$ ＝ $\frac{1.75}{4}$ ×1.10×200×360+270× $\frac{2\times28.3}{200}$ ×360＝62.2kN

（3）计算可承受的*P*

$P = 2V = 2\times62.2 = 12.4\mathrm{kN}$

（4）截面尺寸限制条件

$h_{\mathrm{w}} = h_0 = h - a_s$ =400-40=360mm

$\frac{h_{\mathrm{w}}}{b}$ ＝360/200<4

$0.25\beta_c f_c bh_0$ ＝0.25×1.0×9.6×200×360＝172.8kN >*V*＝62.2kN

截面尺寸满足要求。

4. 解：（1）梁端剪力$V_{\max}$、距离支点边缘480mm处的剪力V_1

$V_{\max}$=75×2.5=187.5kN

V_1=75×(2.5-0.48)=151.5kN

（2）截面尺寸限制条件

$h_{\mathrm{w}} = h_0 = h - a_s$ =500-40=460mm

$\frac{h_w}{b}$ ＝460/200=2.3<4

$0.25\beta_c f_c b h_0$ ＝0.25×1.0×14.3×200×460＝328.9kN > V_{max}=187.5kN

截面尺寸满足要求。

（3）计算距离支点边缘 480mm 处抗剪承载力

$V = 0.7 f_t b h_0 + f_{yv} \frac{nA_{sv1}}{s} h_0$ ＝0.7×1.43×200×460+270×$\frac{2\times 50.3}{200}$×460＝154.6kN> V_1=151.5kN

（4）计算支点边缘抗剪承载力

$$V = 0.7 f_t b h_0 + f_{yv} \frac{nA_{sv1}}{s} h_0 + 0.8 f_y A_{sb} \sin\alpha$$

＝0.7×1.43×200×460+270×$\frac{2\times 50.3}{200}$×460+0.8×300×490.9×sin45°

＝237.9kN> V_{max}=187.5kN

（4）验算最小配箍率

$\rho_{sv,min} = 0.24 \frac{f_t}{f_{yv}}$ ＝0.24×1.43/270=0.127%

今 $\rho_{sv} = \frac{A_{sv}}{bs}$ ＝2×50.3/(200×200)=0.252％，大于最小配箍率。

故满足要求。

第 6 章　钢筋混凝土受扭构件承载力计算

一、填空题

1. 均匀；2. 弯型、剪扭型、扭型；3. 降低、降低；4. 平衡扭转、协调扭转；5. 封闭、做成 135° 弯钩；6. 抗扭纵筋、抗扭箍筋、配筋率、适筋破坏、少筋破坏、超筋破坏、部分超筋破坏；7. 受弯构件的正截面承载力、纯扭构件的承载力、剪扭、受剪承载力和受扭承载力 8. 混凝土、钢筋

二、选择题

1. A；2. D；3. D；4. C；5. B；6. A；7. D；　8. A；9. A; 10. A

三、简答题

1. （1）配置横向钢筋（抗扭箍筋）——靠近构件表面设置横向的抗扭箍筋；

（2）配置抗扭纵向钢筋——沿周边均匀对称布置纵向抗扭钢筋。

2. （1）少筋破坏：当纵向钢筋和箍筋配置过少（或其中之一过少）时，混凝土开裂后，混凝土承担的拉力转移给钢筋，钢筋快速达到屈服强度并进入强化阶段，其破坏特征类似于受弯构件的少筋梁，破坏扭矩与开裂扭矩接近，破坏无预兆，属于脆性破坏。

（2）适筋破坏：当构件中的箍筋和纵筋配置适当时，破坏具有延性性质，有较明显的预兆。

（3）超筋破坏：①部分超筋：当构件中的箍筋或纵筋有一种配的太多时，有一定预兆；② 当受扭箍筋和纵筋都太多时，会发生纵筋和箍筋都没有达到屈服强度，而混凝土先被压碎的现象，这种破坏与受弯构件超筋梁类似，没有明显的破坏预兆，钢筋未充分发挥作用，属脆性破坏，设计中应避免。

3. 为了避免超筋破坏，《混凝土结构设计规范》对构件的截面尺寸作了限制，间接限定抗扭钢筋最大用量。

为了防止少筋破坏，《混凝土结构设计规范》规定，受扭箍筋和纵向受扭钢筋的配筋率不得小于各自的最小配筋率，并应符合受扭钢筋的构造要求。

4. 不可以。参数ς反映了受扭构件中抗扭纵筋和箍筋在数量上和强度上的相对关系，称为纵筋和箍筋的配筋强度比，即纵筋和箍筋的体积比和强度比的乘积，A_{stl} 为箍筋的单肢截面面积，S 为箍筋的间距，对应于一个箍筋体积 $A_{stl}\cdot U_{cor}$ $[u_{cor}=2(b_{cor}+h_{cor})]$ 的纵筋体积为 $A_{stl}\cdot S$，其中 A_{stl} 为截面内对称布置的全部纵筋截面面积，则ζ＝$f_y\cdot A_{stl}\cdot S/f_{yv}A_{stl}\cdot U_{cor}$；试验表明，只有当ζ值在一定范围内时，才可保证构件破坏时纵筋和箍筋的强度都得到充分利用，《规范》要求ζ值符合 0.6≤ζ≤1．7 的条件，当ζ＞1.7 时，取ζ＝1.7。

5. 因为这种螺旋式钢筋施工复杂，也不能适应扭矩方向的改变，因此实际工程并不采用，而是采用沿构件截面周边均匀对称布置的纵向钢筋和沿构件长度方向均匀布置的封闭箍筋作为抗扭钢筋，抗扭钢筋的这种布置形式与构件正截面抗弯承载力及斜截面抗剪承载力要求布置的钢筋形式一致。

6. 弯剪扭构件有弯型破坏、扭型破坏、剪扭型破坏三种破坏形态。

弯型破坏: M较大，T/M较小，且剪力不起控制作用。在配筋适当的条件下，若弯矩相比扭矩较大时，裂缝首先在弯曲受拉底 面出现，然后发展到两个侧面，3 个面上的螺旋形裂缝形成一个扭曲破坏面，而第四破坏面无裂缝。构件破坏时与螺旋形裂缝相交的纵筋及箍筋均受拉达到屈服强度。

扭型破坏: 当扭矩T较大，而T/M和T/V均较大，顶部纵筋少于底部纵筋，扭矩产生的拉应力有可能抵消弯矩产生的压应力 并使顶部纵筋先达到屈服强度，最后促使构件底部受压而破坏。

剪扭型破坏: V 和 T 均较大，M 较小，对构件的承载力不起控制作用时。破坏时与螺旋形裂缝相交的纵筋和箍筋受拉达到屈服强度，二受压区则 靠近另一个侧面，形成剪扭型破坏。

四、计算题

1. 解：（1）验算构件截面尺寸

$$W_t = \frac{1}{6}b^2(3h-b) = \frac{250^2}{6}\times(3\times 450-250) = 11.46\times 10^6\ \text{mm}^2$$

$$\frac{T}{W_t} = \frac{10\times 10^6}{11.46\times 10^6} = 0.87\text{N/mm}^2 < 0.25\beta_c f_c = 0.25\times 1.0\times 14.3 = 3.58\text{N/mm}^2$$

满足 $\frac{T}{W_t} < 0.25\beta_c f_c$ 是规范对构件截面尺寸的限定性要求，本题满足这一要求。

（2）抗扭钢筋计算

$$\frac{T}{W_t} = \frac{10\times 10^6}{11.46\times 10^6} = 0.87\ N/mm^2 < 0.7 f_t$$

按构造配筋即可。

第 7 章　钢筋混凝土偏心受压构件承载力计算

一、填空题

1．受拉钢筋首先达到屈服强度，之后受压区混凝土被压碎、大偏心受压破坏、受压区 混凝土压碎，As 或者受拉或者受压，一般不屈服也可能不屈服、小偏心 受压破坏；2.≤8、=1；3 .受拉钢筋达到屈服，受压钢筋达到屈服；4. 小，大；5．对称配筋、非对称配筋； 6 .纵向弯曲，轴心，稳定系数；7.0.6%,5.0%； 8 .材料破坏，失稳破坏，材料破坏，失稳破坏；9.延性、脆性；10.受拉钢筋屈服的同时，受压区混凝土达到极限压应变被压碎；11. 稳定系数、截面偏心距调整系数、弯矩增大系数；12.大偏心、小偏心、界限状态；13.混凝土质量的的不均匀性、20mm、偏心方向截面尺寸的 1/30；14.小偏心受拉、大偏心受；15.轴拉、钢筋、双筋受弯、大偏心受压、受压区；16.正截面承载能力、抗剪、抗裂、裂缝宽度； 17.安全

二、选择题

1. C；2. B；3. A；4. A；5. D；6. D；7. D； 8. A；9. C; 10. C；11. D；12. D；13. A；14. C；15. A； 16. C；17. B；18. A；19. B；20. A；21. D；22. A；23. D；24. C

三、名词解释

1. 偏心受压构件 *P-Δ* 效应：轴向压力对偏心受压构件的侧移产生附加弯矩和附加曲率的荷载效应称为偏心受压构件的二阶荷载效应，简称 *P-Δ* 效应，这是从结构整体层面上讲的。

2. 偏心受压构件 *P-δ*效应：轴向压力对偏心受压构件的挠曲产生附加弯矩和附加曲率的荷载效应称为偏心受压构件的二阶荷载效应，简称 *P-δ*效应，这是从构件层面上讲的。

四、简答题

1.（1）$\xi \le \xi_b$，大偏心受压破坏；$\xi > \xi_b$，小偏心受压破坏；本质区别是判断远离轴向力一侧的钢筋能否达到屈服强度

（2）破坏特征：

大偏心受压破坏：破坏始自于远端钢筋的受拉屈服，然后近端混凝土受压破坏；

小偏心受压破坏：构件破坏时，混凝土受压破坏，但远端的钢筋并未屈服；

2.（1）偏心受压短柱和长柱有何本质的区别在于，长柱偏心受压后产生不可忽略的纵向弯曲，引起二阶弯矩。

（2）引入截面偏心距调节系数和弯矩增大系数

3. 附加偏心距 e_a 的物理意义在于，考虑由于荷载偏差、施工误差等因素的影响，e_0 会增大或减小，另外，混凝土材料本身的不均匀性，也难保证几何中心和物理中心的重合。其值取 20mm 和偏心方向截面尺寸的 1/30 两者中的较大者。

4．（1）当 N 作用在纵向钢筋 A_s 合力点和 $A_s^{'}$ 合力点范围以外时，为大偏心受拉；当 N 作用在纵向钢筋 A_s 合力点和 $A_s^{'}$ 合力点范围之间时，为小偏心受拉；

（2）大偏心受拉有混凝土受压区，钢筋先达到屈服强度，然后混凝土受压破坏；小偏心受拉破坏时，

混凝土完全退出工作，由纵筋来承担所有的外力。

5．大偏心受拉构件为非对称配筋，如果计算中出现 $x < 2a_s'$ 或出现负值，怎么处理？

答：取 $x = 2a_s'$，对混凝土受压区合力点（即受压钢筋合力点）取矩，

$A_s = \dfrac{Ne'}{f_y(h_0 - a_s')}$， $A_s' = \rho'_{\min}bh$

6. 对于给定截面，材料强度和配筋的偏心受压构件，达到正截面压弯承载力极限时，其压力和弯矩的关系，可以标识为一条相互关联的 N_u-M_u 曲线。这条曲线可以直观的让我们了解大小偏心受压构件的 N_u 和 M_u 以及与配筋率之间的关系，并能利用这种关系快速进行界面设计和判断偏心类别。详见教材 P159.

7. 钢筋混凝土构件中由轴向压力在产生了挠曲变形的杆件中引起的曲率和弯矩增量，属于构件层面的问题。通过引入截面偏心距调节系数和弯矩增大系数

8. 对小偏心受压构件，若 *N* 很大，偏心距 e_0 很小，而远离 *N* 的一侧钢筋数量又相对较少时，构件的破坏可能首先发生在远离 *N* 的一侧，称反向破坏。

对称配筋时，远离 *N* 的一侧钢筋的应力必然小于近 *N* 的一侧，不会先破坏，所以不作"反向破坏"的验算。

9. *N* 很大，偏心距较小，截面宽度又较小于截面高度 *h* 时，垂直于弯矩作用平面的受压承载力可能起控制作用，因此，要复核垂直于弯矩作用平面的受压承载力。

五、计算题

1．解：（1）二阶效应考虑

$h_0 = h - a_s$ = 450-40=410mm

$M = C_m\eta_{ns}M_2$ = 0.96×1.03×280<280 $\mathrm{kN\cdot m}$，取 $M = 280\mathrm{kN\cdot m}$

$e_0 = \dfrac{M}{N}$ = 280×1000/370=757mm

$e_a = \max(20, \dfrac{450}{30}) =$ 20mm

$e_i = e_0 + e_a$ = 757mm>0.3h_0=0.3×410=123mm，按大偏压计算。

（2）计算受压区高度

$e = e_i + 0.5h - a_s$ = 757+0.5×450-40=942mm

由公式 $Ne = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \dfrac{x}{2}\right) + f_y' A_s'(h_0 - a_s')$ 知，

$$x = h_0 - \sqrt{h^2{}_0 - \frac{2\left[Ne - f_y'A_s'(h_0 - a_s')\right]}{\alpha_1 f_c b}}$$

$$= 410 - \sqrt{410^2 - \frac{2\left[370\times1000\times942 - 360\times1256\times(410-40)\right]}{1.0\times14.3\times350}}$$

=101mm $< \xi_b h_0$=0.518×410=212mm

$x > 2a_s' =$ 80mm

故为大偏心受压构件，且受压钢筋屈服。

（3）计算 A_s

$A_s = \dfrac{\alpha_1 f_c bx + f_y'A_s' - N}{f_y}$ = (1.0×14.3×350×101+360×1256-370×1000)/360==1632mm^2

（4）验算最小配筋率

单侧：$A_s' = 1256\text{mm}^2 > 0.2\%bh = 0.2\%\times350\times450=315\text{mm}^2$　满足

全部：$\rho = \dfrac{A_s' + A_s}{bh} = (1256+1632)/(350\times450) = 1.83\% > 0.55\%$　满足

2. 解：（1）二阶效应考虑

$h_0 = h - a_s = 500-40=460\text{mm}$

因为 $M_1 = M_2 = 400\text{kN}\cdot\text{m}$，$C_m = 1.0$

$M = C_m\eta_{ns}M_2 = 1.0\times1.02\times400=408\ \text{kN}\cdot\text{m}$，取 $M = 408\text{kN}\cdot\text{m}$

$e_0 = \dfrac{M}{N} = 408\times1000/450=906.7\text{mm}$

$e_a = \max(20, \dfrac{500}{30}) = 20\text{mm}$

$e_i = e_0 + e_a = 926.7\text{mm} > 0.3h_0 = 0.3\times460=138\text{mm}$，按大偏压计算。

（2）计算 A_s'

为充分利用混凝土，取 $x=\xi_b h_0 = 0.518\times460=238.3\text{mm}$

$e = e_i + 0.5h - a_s = 926.7+0.5\times500-40=1136.7\text{mm}$

由公式 $Ne = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \dfrac{x}{2}\right) + f_y' A_s'(h_0 - a_s')$ 知，

$$A_s' = \frac{Ne - \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \dfrac{x}{2}\right)}{f_y'(h_0 - a_s')} = \frac{450\times1000\times1136.7 - 1.0\times14.3\times300\times238.3\left(460 - \dfrac{238.3}{2}\right)}{360\times(460-40)}$$

$=1078\ \text{mm}^2 > 0.002bh = 0.002\times300\times500=300\text{mm}^2$

（3）计算 A_s

$A_s = \dfrac{\alpha_1 f_c bx + f_y' A_s' - N}{f_y} = (1.0\times14.3\times300\times238.3+360\times1078-450\times1000)/360=2668\text{mm}^2$

$> 0.002bh = 0.002\times300\times500=300\ \text{mm}^2$

（4）验算最小配筋率

全部：$\rho = \dfrac{A_s' + A_s}{bh} = (1078+2668)/(300\times500) = 2.50\% > 0.55\%$　满足

3. 解：（1）最小配筋率验算

$h_0 = h - a_s = 600-40=560\text{mm}$

$A_s' = 1520\text{mm}^2 > 0.002bh = 0.002\times400\times600=480\text{mm}$

$A_s = 1256\text{mm}^2 > 0.002bh = 0.002\times400\times600=480\text{mm}$

全部：$\rho = \dfrac{A_s' + A_s}{bh} = (1520+1256)/(400\times600) = 1.16\% > 0.55\%$　满足

（2）计算受压区高度

假设大偏压：

$x = \dfrac{N - f_y' A_s' + f_y A_s}{\alpha_1 f_c b} = (1200\times1000-360\times1520+360\times1256)/（1.0\times19.1\times400）$

$=145\text{mm} < \xi_b h_0 = 0.518\times560=290\text{mm}$

且 $x > 2a_s' = $80mm

属于大偏心受压，且受压钢筋屈服。

（3）计算偏心距

$$e = \frac{\alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + f_y' A_s'(h_0 - a_s')}{N}$$

$$= \frac{1.0 \times 19.1 \times 400 \times 145 \times (560 - 0.5 \times 145) + 360 \times 1520 \times (560 - 40)}{1200 \times 1000}$$ =687mm

$e_i = e - 0.5h + a_s$ = 687-0.5×600+40=427mm

$e_a = \max(20, \frac{600}{30}) = $ 20mm

$e_0 = e_i - e_a =$ 427-20=407mm

$M = Ne_0 =$ 1200×0.407=488.4 $\mathrm{kN \cdot m}$

4、解：（1）最小配筋率验算

$h_0 = h - a_s =$ 600-40=560mm

$A_s = A_s' = 1964\mathrm{mm}^2 > 0.002bh$ =0.002×400×600=480mm

全部： $\rho = \frac{A_s' + A_s}{bh} =$ (1964+1964)/(400×600) =1.64%>0.55%　　满足

（2）计算受压区高度

假设大偏压：

$x = \frac{N}{\alpha_1 f_c b} =$ (900×1000)/（1.0×19.1×400）

=118mm $< \xi_b h_0$ =0.518×560=290mm

且 $x > 2a_s' = $80mm

属于大偏心受压，且受压钢筋屈服。

（3）计算偏心距

$$e = \frac{\alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + f_y' A_s'(h_0 - a_s')}{N}$$

$$= \frac{1.0 \times 19.1 \times 400 \times 118 \times (560 - 0.5 \times 118) + 360 \times 1964 \times (560 - 40)}{900 \times 1000}$$ =910mm

$e_i = e - 0.5h + a_s$ = 910-0.5×600+40=650mm

$e_a = \max(20, \frac{600}{30}) = $ 20mm

$e_0 = e_i - e_a =$ 650-20=630mm

$M = Ne_0 =$ 900×0.63=567 $\mathrm{kN \cdot m}$

第8章　钢筋混凝土构件的裂缝、变形和耐久性

一、填空题

1.适用性、耐久性；2．受拉钢筋合力重心位置处构件；3．拉应力、垂直于拉应力；4．裂缝出齐后裂缝间距、纵筋配筋率、纵筋直径、纵筋表面形状、混凝土保护层厚度；5、环境类别、使用环境、设计使用年

限；6．变量、荷载值、加荷时间；7．反映裂缝之间混凝土协调受拉钢筋抗拉工作的程度；8．同号 、最大弯矩截面、弯矩最大；9．用长期效应组合挠度增大系数θ；10.变小、变大、变小、变小、预应力；11.正常使用极限状态、标准值；12. 增加截面高度 ； 13. 裂缝宽度 、变形值；14. 沿长向有变化的抗弯刚度。

二、选择题

1. D；2. D；3. D；4.D；5. B；6. A；7. A； 8. D；9. C; 10. C；11. B；12. C；13. C；14. B；
15. B；；16. D；17. A；18. C；19. C；20. B；21. A；22. A；23. C；24. C；25. A；26. C

三、名词解释

1、裂缝宽度：受拉钢筋重心水平处构件侧面混凝土的裂缝宽度。
2、最小刚度原则：在简支梁全跨长范围内，可都按弯矩最大处的截面弯曲刚度，亦即按最小的截面弯曲刚度，用材料力学方法中不考虑剪切变形影响的公式来计算挠度。
3、混凝土结构的耐久性：指结构或构件在设计使用年限内，在正常维护条件下，不需要进行大修就可满足既定功能要求的能力。

四、简答题

1．假设混凝土的应力σ_c由零增大到f_t需要经过l长度的粘结应力的积累，即直到距开裂截面为l处，钢筋应力由σ_{s1}降低到σ_{s2}，混凝土的应力σ_c由零增大到f_t，才有可能出现新的裂缝。显然，在距第一条裂缝两侧l的范围内，理论上，即在间距小于 $2l$ 的两条裂缝之间，将不可能再出现新裂缝。
2．与构件类型、保护层厚度、配筋率、钢筋直径和钢筋应力等因素有关。如不满足，可以采取减小钢筋应力（即增加钢筋用量）或减小钢筋直径等措施。
3．主要是指刚度的取值不同，材料力学中挠度计算采用弹性弯曲刚度，钢筋混凝土构件挠度计算采用由短期刚度修正的长期刚度。

"最小刚度原则"就是在简支梁全跨长范围内，可都按弯矩最大处的截面抗弯刚度，亦即按最小的截面抗弯刚度，用材料力学方法中不考虑剪切变形影响的公式来计算挠度。这样可以简化计算，而且误差不大，是允许的。

4．系数ψ的物理意义就是反映裂缝间受拉混凝土对纵向受拉钢筋应变的影响程度。ψ的大小还与以有效受拉混凝土截面面积计算的有效纵向受拉钢筋配筋率ρ_{te}有关。
5．影响因素有：配筋率ρ、 截面形状、 混凝土强度等级、 截面有效高度 h_0。可以看出，如果挠度验算不符合要求，可增大截面高度，选择合适的配筋率ρ。
6、有两类：荷载引起的裂缝和由变形引起的裂缝
（1）荷载引起的裂缝：如受弯、受拉等构件的垂直裂缝；受弯构件斜裂缝。

对于因荷载引起的构件斜裂缝，规范对其验算方法尚无专门规定。但试验结果表明，只要能满足斜截面承载力计算要求，并相应配置了符合计算及构造要求的腹筋，则构件的斜裂缝宽度不会太大，能满足正常使用要求。

对于荷载引起的与构件轴线垂直的裂缝，国内外对其形成规律、影响因素以及计算方法已做了大量的试验研究，规范给出了计算方法。

（2）由变形引起的裂缝：如基础沉降、收缩、温度作用等。
7. 随着时间的增长，由于受拉区混凝土应力松驰和滑移徐变，裂缝间受拉钢筋平均应变还将继续增长而使裂缝变宽，同时，混凝土收缩也使裂缝宽度有所增大。

8．裂缝开展宽度是指受拉钢筋重心水平处构件侧表面上的混凝土的裂缝宽度。试验量测表明，沿裂缝深度，裂缝宽度是不相等的，由于受到钢筋的约束，近钢筋处回缩变形小，构件表面处回缩大。而保护层厚度是从纵向钢筋外表面算至混凝土外表面的。所以裂缝宽度的大小与保护层厚度是有关系的。

9．根据正常使用阶段对结构构件裂缝的不同要求，将裂缝的控制等级分为三级：正常使用阶段严格要求不出现裂缝的构件，裂缝控制等级属一级；正常使用阶段一般要求不出现裂缝的构件，裂缝控制等级属二级；正常使用阶段允许出现裂缝的构件，裂缝控制等级三级。

五、计算题

1.【解】：$\alpha_{cr} = 1.9$，$f_{tk} = 1.87N/mm^2$，$E_s = 2.0\times10^5N/mm^2$，$d_{eq} = 25mm$

$h_0 = 700 - 40 = 660mm$

1、按有效受拉区配筋率 ρ_{te}

$$\rho_{te} = \frac{A_s}{A_{te}} = \frac{A_s}{0.5bh} = \frac{1964}{0.5\times250\times700} = 0.0224 > 0.01$$

2、短期效应组合下的钢筋应力 σ_{sk}

$$\sigma_{sk} = \frac{M_{k}}{0.87A_s h_0} = \frac{185.22\times10^6}{0.87\times1964\times660} = 164.2N/mm^2$$

3、钢筋应变不均匀系数 ψ

$$\psi = 1.1 - \frac{0.65f_{tk}}{\rho_{te}\sigma_{sk}} = 1.1 - \frac{0.65\times1.87}{0.0224\times164.2} = 0.77 < 1.0$$

$$> 0.2$$

4、最大裂缝宽度 ω_{ax}

$$\omega_{\max} = \alpha_{cr}\psi\frac{\sigma_{sk}}{E_s}(1.9c + 0.08\frac{d_{eq}}{\rho_{te}}) = 1.9\times0.77\times\frac{164.2}{2\times10^5}\times(1.9\times20 + 0.08\times\frac{25}{0.0224})$$

$$= 0.15mm < \omega_{\max} = 0.2mm$$

第 9 章　预应力混凝土构件设计

一、填空题

1．先张法、后张法、粘结力、锚具； 2．预应力钢丝、钢绞线、预应力螺纹钢筋；3．强度高、收缩徐变小、快硬早强；4．张拉端锚具变形和预应力筋内缩引起的预应力损失、预应力筋与孔道壁之间的摩擦引起的预应力损失、温差损失、预应力筋应力松弛引起的损失、混凝土的收缩徐变引起的损失、环形构件由于混凝土的局部挤压引起的预应力损失；5．三； 6．$\sigma_{l1}+\sigma_{l2}+\sigma_{l3}+\sigma_{l4}$、$\sigma_{l5}$；7．$\sigma_{l1}+\sigma_{l2}$、$\sigma_{l4}+\sigma_{l5}+\sigma_{l6}$；8．徐变、预应力损失；9．100N/mm^2、80 N/mm^2。

二、选择题

1. D；2. C；3. C；4.C；5. A；6. B；7. A； 8. A；9. D; 10. C；11. D；12. B；13. C；14. A；
15. A；16. D

三、名词解释

1、预应力 在结构构件使用前，通过先张法或后张法预先对构件混凝土施加的压应力。
2、张拉控制应力：张拉钢筋时，张拉设备上的测力计所指示的总张拉力除以预应力筋面积。

四、简答题

1．①预应力：
②优点：提高构件的抗裂性、刚度及抗渗性，能够充分发挥材料的性能，节约钢材。
③缺点：构件的施工、计算及构造较复杂，且延性较差。
2．①要求混凝土强度高。因为先张法构件要求提高钢筋与混凝土之间的粘结应力，后张法构件要求具有足够的锚固端的局部受压承载力。
②要求钢筋强度高。因为张拉控制应力较高，同时考虑到为减小各构件的预应力损失。
3． σ_{con} 过高，可能引起张拉时个别钢丝拉断；σ_{con} 过高，施工阶段可能引起构件某些部分受拉开裂或局部受压破坏；σ_{con} 过高，使开裂荷载与破坏荷载接近，产生无预兆的脆性破坏。
4．预应力损失包括：①锚具变形和钢筋内缩引起的预应力损失。可通过选择变形小锚具或增加台座长度、少用垫板等措施减小该项预应力损失；
②预应力钢筋与孔道壁之间的摩擦引起的预应力损失。可通过两端张拉或超张拉减小该项预应力损失；
③预应力钢筋与承受拉力设备之间的温度差引起的预应力损失。可通过二次升温措施减小该项预应力损失；
④预应力钢筋松弛引起的预应力损失。可通过超张拉减小该项预应力损失；
⑤混凝土收缩、徐变引起的预应力损失。可通过减小水泥用量、降低水灰比、保证密实性、加强养互等措施减小该项预应力损失；
⑥螺旋式预应力钢筋构件，由于混凝土局部受挤压引起的预应力损失。为减小该损失可适当增大构件直径。